Une formule fondamentale

Une fonction modulaire de poids k est une fonction *méromorphe* sur $\mathcal{H}$ qui vérifie :

$$\forall g \in SL_2(\mathbb{Z}), \forall z \in \mathcal{H}, f(g \cdot z) = (cz + d)^{2k} f(z),$$

et qui est *méromorphe à l'infini*. On a donc $f(z) = F(e^{2i\pi z})$, où $F(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n$ est méromorphe sur $\mathbb{D}$ (la suite $(a_n)_{n \leq 0}$ possède un nombre fini de termes non nuls). On note $\text{ord}_\infty(f) := \min_{n \in \mathbb{Z}} \{a_n \neq 0\}$. On rappelle qu'une forme modulaire est une fonction modulaire *holomorphe* sur $\mathcal{H}$ et à l'infini.

Dans l'énoncé suivant, on note $\rho = e^{2i\pi/3}$, $\rho' = e^{i\pi/3}$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \setminus \{i, \rho, \rho'\}$.

Théorème 1 : *Soit f une fonction modulaire de poids k non identiquement nulle. Alors*

$$\text{ord}_\infty(f) + \frac{1}{2} \text{ord}_i(f) + \frac{1}{3} \text{ord}_\rho(f) + \sum_{P \in \mathcal{D}'} \text{ord}_P(f) = k/6.$$

Cette formule nous permettra en particulier d'expliciter l'espace vectoriel des *formes modulaires* de poids $k \in \mathbb{Z}$. Les séries d'Eisenstein g_2 et g_3 joueront un rôle fondamental.

1) Observer que la série sur $P \in \mathcal{D}'$ comporte un nombre fini de termes. Pour cela, vérifier l'existence de $r > 0$ tel que f n'a ni zéro ni pôle dans $\mathcal{D} \cap \{\Im(z) > e^{2\pi r}\}$.

Pour montrer cette formule, on considère le chemin dessiné ci-dessous. On suppose pour commencer que f n'a ni zéro ni pôle sur ce chemin. On note $\varphi = f'/f$.

2) Montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_{[EA]} \varphi(z) dz = -\text{ord}_\infty(f)$.

3) Montrer que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\widetilde{B_\epsilon B'_\epsilon}} \varphi(z) dz = -\text{ord}_\rho(f)/6$.

4) Ecrire des formules analogues pour les arcs de cercles $\widetilde{C_\epsilon C'_\epsilon}$ et $\widetilde{D_\epsilon D'_\epsilon}$.

5) Vérifier que $\frac{1}{2i\pi} \int_{[AB_\epsilon]} \varphi(z) dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{[D'_\epsilon E]} \varphi(z) dz = 0$.

6) Montrer que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\widetilde{B'_\epsilon C'_\epsilon}} \varphi(z) dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\widetilde{C'_\epsilon D'_\epsilon}} \varphi(z) dz = k/6$, et conclure.

7) Traiter le cas où f possède des zéros et/ou des pôles sur le chemin.

Les espaces M_k

Soit M_k l'espace vectoriel des *formes modulaires* de poids $k \geq 0$. L'énoncé suivant explicite ces espaces, la démonstration repose sur le théorème 1. Rappelons que $g_2 = 60G_2$ et $g_3 = 140G_3$, ce sont des formes modulaires de poids respectifs 2 et 3 (cf la feuille 5).

Théorème 2 : *Pour tout $k \geq 0$, la famille suivante est une base de M_k :*

$$\mathcal{F}_k := \{g_2^p \cdot g_3^q, 2p + 3q = k, (p, q) \in \mathbb{N}^2\}.$$

La dimension $m_k = \dim M_k$ vérifie :

1. $m_k = [k/6]$ si k est de la forme $1 + 6p$, où $p \in \mathbb{N}$,
2. $m_k = [k/6] + 1$ sinon.

Dans les deux prochaines questions, $\phi \in M_2$ et $\psi \in M_3$.

- 1) Vérifier que $\text{ord}_\infty(\phi) = 0$, $\text{ord}_i(\phi) = 0$, $\text{ord}_\rho(\phi) = 1$ et $\text{ord}_P(\phi) = 0$ sur $\mathcal{D}'$.
- 2) De même, $\text{ord}_\infty(\psi) = 0$, $\text{ord}_i(\psi) = 1$, $\text{ord}_\rho(\psi) = 0$ et $\text{ord}_P(\psi) = 0$ sur $\mathcal{D}'$.

On détermine maintenant les espaces M_k pour k négatif et $0 \leq k \leq 5$.

- 3) $M_{-k} = \{0\}$ pour tout $k > 0$, $M_0 = \mathbb{C}$ et $M_1 = \{0\}$.
- 4) Pour $2 \leq k \leq 5$, M_k est de dimension 1, engendré resp. par g_2 , g_3 , g_2^2 et g_2g_3 .

Posons maintenant $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \in M_6$. Cette fonction ne s'annule pas sur $\mathcal{H}$ car le polynôme $P(X) = 4X^3 - g_2X - g_3$ est à racines simples (cf la feuille 1).

- 5) Vérifier que $\text{ord}_\infty(\Delta) = 1$ et $\text{ord}_z(\Delta) = 0$ sur $\mathcal{D}$.

Soit $\epsilon : M_k \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\epsilon(f) = f(\infty)$ et $\delta : M_k \rightarrow M_{k+6}$ défini par $\delta(f) = \Delta \cdot f$.

- 6) Montrer la suite exacte $0 \rightarrow M_k \rightarrow M_{k+6} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$.
- 7) En déduire les valeurs de m_k .

On s'intéresse maintenant à la famille $\mathcal{F}_k$.

8) Montrer que cette famille engendre M_k . On pourra raisonner par récurrence sur k et utiliser la suite exacte de la question 6.

- 9) Montrer finalement que cette famille est libre.