Université de Paris-Sud Orsay Année universitaire 2009–2010

M2, Surfaces de Riemann, Feuille 4

Théorème d'Appel-Goursat

Théorème : *Soit D un diviseur sur $\mathcal{E}$ de degré $d \geq 1$ et ϕ une fonction thêta méromorphe de diviseur D. On note Λ l'espace vectoriel des fonctions thêta holomorphes ayant même type que ϕ. Alors* $\dim \Lambda = d$.

On fait ici l'abus de considérer la fonction nulle comme une fonction thêta. Il existe bien une fonction thêta méromorphe ϕ ayant D pour diviseur (utiliser par exemple la fonction σ). Notons (h, a) son type.

Soit θ une fonction thêta holomorphe de type (h, a). Posons :

$$\forall z \in \mathbb{C}\ ,\ T(z) := a(1)^{-z}\, e^{-\pi\, h(1)\, z^2/2}\, \theta(z).$$

1) Vérifier que $T(z+1) = T(z)$. En déduire qu'il existe une fonction holomorphe $F : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ vérifiant $T(z) = F(e^{2i\pi z})$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2) Montrer que $T(z+\tau) = C\, q^{-d}\, e^{-2i\pi dz}\, T(z)$, où $C = a(\tau)/a(1)^\tau$ et $q = e^{i\pi\tau}$ (on utilisera l'égalité $\partial h(1,\tau) = 2id$, cf la feuille 3).

Soit $F(w) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l w^l$ le développement de F en série de Laurent.

3) Montrer la relation $c_{l+d} = c_l \cdot q^{2l+d}/C$ pour tout $l \in \mathbb{Z}$.

4) En déduire $c_{l+kd} = c_l \cdot q^{2lk+dk^2}/C^k$ pour tout $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$.

On note $F_l(w) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C^{-k}\, q^{2lk+dk^2}\, w^{dk}$ pour $0 \leq l \leq d-1$.

5) Vérifier que $F(w) = \sum_{l=0}^{d-1} c_l\, F_l(w)\, w^l$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$.

6) Conclure.

Théorème de Riemann-Roch

Un diviseur $D = \sum_{P\in\mathcal{E}} d_P\, [P]$ sur $\mathcal{E}$ est *positif* (noté $D \geq 0$) si les d_P sont positifs. On munit $\mathsf{div}(\mathcal{E})$ d'une relation d'ordre : $D' \geq D$ si $D' - D \geq 0$. On définit pour tout diviseur D sur $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{L}(D) = \{f \text{ est méromorphe sur } \mathbb{C}, \Gamma\text{-périodique et vérifie } \mathsf{div}(f) \geq -D\}.$$

On reprend les notations de la partie précédente. Soient ϕ une fonction thêta méromorphe de diviseur D, et Λ l'espace vectoriel des fonctions thêta holomorphes de même type.

1) Vérifier que $\mathcal{L}(D)$ est un espace vectoriel.

2) Montrer que l'application $\chi : \theta \mapsto \theta/\phi$ est un isomorphisme entre Λ et $\mathcal{L}(D)$.

On établit ainsi la version suivante du théorème de Riemann-Roch :

Théorème : *Soit D un diviseur sur $\mathcal{E}$ de degré $d \geq 1$. Alors* $\dim \mathcal{L}(D) = d$.