Université de Paris-Sud Orsay Année universitaire 2009-2010

M2, Surfaces de Riemann, Feuille 3

On note toujours $\Gamma = \{p + \tau q\,,\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\} \subset \mathbb{C}$ et $\mathcal{E} = \mathbb{C}/\Gamma$. On appelle *fonction thêta* associée à Γ toute fonction holomorphe $\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ non identiquement nulle vérifiant : pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe $(h(\gamma), a(\gamma)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ satisfaisant :

$$\forall z \in \mathbb{C}\ ,\ \theta(z+\gamma) = a(\gamma) e^{\pi h(\gamma)(z+\gamma/2)} \theta(z).$$

La donnée (h,a) s'appelle le *type* de la fonction thêta.

1) Soit $\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle. Vérifier que θ est une fonction thêta si et seulement si la fonction méromorphe $(\theta'/\theta)'$ est Γ-périodique.

2) Vérifier que les fonctions $z \to e^{az^2+bz+c}$ sont des fonctions thêta et montrer que ce sont les seules fonctions thêta qui ne s'annulent pas (elles sont dites *triviales*).

3) Observer que l'on peut définir le diviseur $\mathsf{div}(\theta)$ d'une fonction thêta sur $\mathcal{E}$. Montrer que $\tau h(1) - h(\tau) = 2i \deg \mathsf{div}\theta$.

4) Vérifier que les fonctions de Riemann $\theta[a\,b]$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\theta[a\,b](z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{i\pi(\tau(m+a)^2 + 2(m+a)(z+b))}.$$

sont des fonctions thêta dont on donnera le type. Expliciter le diviseur de $\theta[\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}]$.

Étude du type

Soit θ une fonction thêta de type (h,a) et posons $\partial h(\gamma,\gamma') := h(\gamma)\gamma' - h(\gamma')\gamma$.

5) Montrer que $h(\gamma+\gamma') = h(\gamma) + h(\gamma')$ et $a(\gamma+\gamma') = a(\gamma)a(\gamma')e^{\frac{\pi}{2}\partial h(\gamma',\gamma)}$. En déduire que $\partial h(\gamma,\gamma') \in 2i\mathbb{Z}$.

Notons encore $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ le prolongement $\mathbb{R}$-linéaire du morphisme de 6) à $\mathbb{C}$. Pour tout $(z,w) \in \mathbb{C}^2$, on pose $B(z,w) := x_1 y_2 - y_1 x_2$, où $z = x_1 + \tau x_2$ et $w = y_1 + \tau y_2$ (les x_i et y_i étant réels) et soient S l'aire du parallélogramme défini par $\{1,\tau\}$ et $d = \deg \mathsf{div}(\theta)$.

6) Montrer que $\partial h(z,w) = 2idB$ et $B(z,w) = \frac{1}{S}\Im(\bar{z}w)$.

7) En déduire que $h(z) = \alpha z + \frac{d}{S}\bar{z}$, où $\alpha \in \mathbb{C}$.

Fonctions Thêta réduites

On dit qu'une fonction thêta de type (h,a) est *réduite* si :

$$\forall \gamma \in \Gamma\ ,\ |a(\gamma)| = 1 \quad \text{et} \quad \gamma \cdot h(\gamma) \in \mathbb{R}.$$

On note Θ_{red} l'ensemble de ces fonctions thêta.

8) Soit θ une fonction thêta réduite de type (h,a). Alors $h(z) = \frac{d}{S}\bar{z}$.

9) Montrer que toute fonction thêta se décompose de manière unique sous la forme $\theta = \theta_0 \cdot \theta_{red}$, où θ_0 est une fonction thêta triviale vérifiant $\theta_0(0) = 1$, et θ_{red} est une fonction

thêta réduite. Pour l'existence, on pourra considérer la fonction $\varphi(z) = \theta(z)e^{-\frac{\pi}{2}\alpha z^2}$ (où α est définie en 7)) puis la fonction $\psi(z) = \varphi(z)e^{i\tilde{c}(z)}$ où $\tilde{c}$ est la partie $\mathbb{C}$-linéaire du morphisme $\gamma \mapsto \log|a(\gamma)|$ (voir la question 5)).

On peut bien sûr étendre considérer les fonctions thêta méromorphes. Observer que Θ_{red} est un groupe multiplicatif et montrer :

10) L'application $\mathsf{div} : \mathbb{P}(\Theta_{red}) \to \mathsf{div}(\mathcal{E})$ est un isomorphisme, où $\mathbb{P}(\Theta_{red}) = \Theta_{red}/\mathbb{C}^*$