Université de Paris-Sud Orsay Année universitaire 2009-2010

M2, Surfaces de Riemann, Feuille 2

On note Γ le réseau $\{p+\tau q\,,\,(p,q)\in\mathbb{Z}^2\}\subset\mathbb{C}$ et $\Gamma^*=\Gamma\setminus\{0\}$. Soit $\mathcal{E}=\mathbb{C}/\Gamma$ et π la projection $\mathbb{C}\to\mathcal{E}$. Un *diviseur* sur $\mathcal{E}$ est une combinaison linéaire formelle $D=\sum_{P\in\mathcal{E}} d_P\,[P]$, où les d_P sont des entiers relatifs tous nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux. L'ensemble des diviseurs forme un groupe abélien noté $\mathsf{div}(\mathcal{E})$. Pour toute fonction méromorphe f sur $\mathcal{E}$, on définit $\mathsf{div}(f)=\sum_{P\in\mathcal{E}}\mathsf{ord}_P(f)\,[P]$, où $\mathsf{ord}_P(f)$ est l'ordre du pôle (négatif) ou du zéro (positif) de f en P. On se propose de démontrer le résultat suivant :

Théorème : *Soit $D=\sum_{k=1}^n d_k\,[\pi(z_k)]$ un diviseur sur $\mathcal{E}$. Il existe une fonction méromorphe φ sur $\mathcal{E}$ ayant D pour diviseur si et seulement si :*

$$\sum_{k=1}^n d_k=0 \quad \textit{et} \quad \sum_{k=1}^n d_k z_k\in\Gamma.$$

De plus la fonction φ est unique à constante multiplicative non nulle près.

1) Rappeler pourquoi les conditions sont nécessaires.

2) Justifier l'assertion sur l'unicité.

Montrons que les conditions sont suffisantes. Soit σ la fonction de Weierstrass :

$$\sigma(z)=z\prod_{\gamma\in\Gamma^*}\left(1-\frac{z}{\gamma}\right)e^{\frac{z}{\gamma}+\frac{z^2}{2\gamma^2}}.$$

3) Vérifier que σ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

4) Donner l'expression de $\xi=-\sigma'/\sigma$ et vérifier que $\xi'=\wp$.

5) Montrer que $\xi(z)=\xi(z+1)+c_1$ et $\xi(z)=\xi(z+\tau)+c_\tau$, où $c_1:=-2\,\xi(1/2)$ et $c_\tau=-2\,\xi(\tau/2)$. Établir la relation de Legendre $c_1\tau-c_\tau=2i\pi$.

6) Vérifier enfin que $\sigma(z+1)=-\sigma(z)e^{c_1(z+1/2)}$ et $\sigma(z+\tau)=-\sigma(z)e^{c_\tau(z+\tau/2)}$.

Fixons à présent un diviseur $D=\sum_{k=1}^n d_k\,[\pi(z_k)]$ sur $\mathcal{E}$ vérifiant la condition énoncée :

$$\sum_{k=1}^n d_k=0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n d_k z_k\in\Gamma.$$

7) Trouver $z_0\in\mathbb{C}$ et $(\delta_0,\dots,\delta_n)\in\mathbb{Z}$ tels que

$$\sum_{k=0}^n \delta_k=0 \;\;,\;\; \sum_{k=0}^n \delta_k z_k=0 \;\text{ et }\; D=\sum_{k=0}^n \delta_k\,[\pi(z_k)].$$

8) Montrer finalement que $\varphi:=\prod_{k=0}^n\sigma(z-z_k)^{\delta_k}$ est Γ-périodique de diviseur D.

9) "Application" : montrer la formule

$$\wp(u)-\wp(v)=-\sigma(u)^{-2}\sigma(v)^{-2}\sigma(u+v)\sigma(u-v).$$

Un isomorphisme entre $\mathcal{E}$ et $\mathsf{Pic}^0(\mathcal{E})$

On définit le morphisme deg : $\mathsf{div}(\mathcal{E}) \to \mathbb{Z}$ en posant $\deg\left(\sum_{P\in\mathcal{E}} d_P\,[P]\right) := \sum_{P\in\mathcal{E}} d_P$. Soit $\mathsf{div}^0(\mathcal{E})$ son noyau. Un diviseur sur $\mathcal{E}$ est dit *principal* si il est le diviseur d'une fonction méromorphe sur $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ l'ensemble des diviseurs principaux, c'est un sous-groupe de $\mathsf{div}^0(\mathcal{E})$. Le quotient $\mathsf{Pic}(\mathcal{E}) := \mathsf{div}(\mathcal{E})/\mathcal{P}(\mathcal{E})$ est le *groupe de Picard de* $\mathcal{E}$.

Avec ces définitions, le théorème précédent se reformule de la manière suivante : un diviseur $D = \sum_{k=1}^{n} d_k\,[P_k] \in \mathsf{div}^0(\mathcal{E})$ est principal si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} d_k P_k$ est égal à O, l'élément neutre de $\mathcal{E}$.

Montrer le théorème suivant :

Théorème : *L'application*

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathsf{Pic}^0(\mathcal{E}) = \mathsf{div}^0(\mathcal{E})/\mathcal{P}(\mathcal{E}) \\ P & \longmapsto & [P]-[O] \qquad \mathsf{mod}\ \mathcal{P}(\mathcal{E}) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.