Université Paris-Sud Orsay Année universitaire 2009-2010

M2, Surfaces de Riemann, Feuille 1

Soit $\tau \in \mathbb{C}$ de partie imaginaire $\Im(\tau) > 0$ et Γ le sous-groupe additif discret $\{p + \tau q\,,\ (p,q) \in \mathbb{Z}^2\} \subset \mathbb{C}$. Soit $\Gamma^* = \Gamma \setminus \{0\}$. Une fonction holomorphe (resp. méromorphe) sur $\mathbb{C}$ est dite Γ-périodique si elle vérifie :

$$\forall \gamma \in \Gamma\ ,\ \forall z \in \mathbb{C}\ ,\ f(z+\gamma) = f(z).$$

On note $\mathcal{E} := \mathbb{C}/\Gamma$ et π la projection $\mathbb{C} \to \mathcal{E}$. Une fonction $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ est holomorphe (resp. méromorphe) si $\varphi \circ \pi$ est holomorphe (resp. méromorphe) sur $\mathbb{C}$.

Quelques observations

1) Montrer que toute fonction holomorphe sur $\mathcal{E}$ est constante.

2) Soit f une fonction méromorphe Γ-périodique non constante. Soient $w \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{Q}$ le parallélogramme orienté $\{w\,,\ w+1\,,\ w+1+\tau\,,\ w+\tau\}$. On note $\tilde{\mathcal{Q}}$ l'enveloppe convexe de $\mathcal{Q}$. Pourquoi peut-on supposer que f ne présente pas de pôle sur $\mathcal{Q}$? Montrer que $\int_{\mathcal{Q}} f(z)\,dz = 0$. En déduire que f possède au moins deux pôles comptés avec multiplicité.

3) On suppose de plus que f n'a pas de zéro sur $\mathcal{Q}$. Soient N (resp. P) le nombre de zéros (resp. de pôles) de f dans $\tilde{\mathcal{Q}}$. Montrer que $N = P$.

4) Soient $(\zeta_1, \ldots, \zeta_p)$ les zéros et les pôles de f dans $\tilde{\mathcal{Q}}$, et $(m_1, \ldots, m_p) \in \mathbb{Z}$ leurs multiplicités respectives. Montrer que $\sum_{i=1}^p m_i \zeta_i$ est un élément de $\Gamma \subset \mathbb{C}$.

La fonction $\wp$ de Weierstrass

Montrons que l'expression suivante définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \left(\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right). \tag{1}$$

1) Soit $\mathcal{C}_N = \{u + \tau v\,,\ (u,v) \in \mathbb{R}^2\,,\ |u| = N \,\text{ou}\, |v| = N\}$. Montrer que pour tout $k \geq 3$ la série de terme général $a_N := \sum_{\gamma \in \Gamma^* \cap \mathcal{C}_N} |\gamma^{-k}|$ converge.

2) Montrer que la série de fonctions méromorphes définie par (1) converge normalement sur les compacts K de $\mathbb{C}$.

La fonction $\wp$ est donc méromorphe sur $\mathbb{C}$ et ses pôles sont les éléments du réseau Γ. On vérifie maintenant que $\wp$ est Γ-périodique.

3) Observer que $\wp'$ est Γ-périodique. Déterminer les pôles et les zéros de $\wp'$.

4) Montrer que $\wp$ est Γ-périodique.

5) Soit $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Montrer que l'équation $\wp = a$ possède modulo Γ exactement deux solutions avec multiplicité. Montrer qu'elles sont opposées (i.e. $w = -z$) modulo Γ et déterminer les solutions doubles.

Quelques propriétés

1) Soit $G_k = \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \gamma^{-k}$. Montrer que l'on a au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k \geq 1} (2k+1) G_{2k+2} z^{2k}.$$

2) Montrer que $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 60G_4\wp(z) - 140G_6$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On pourra vérifier que la différence des deux termes définit une fonction holomorphe Γ-périodique.

3) On note $g_2 = 60G_4$ et $g_3 = 140G_6$. Pourquoi les racines du polynôme $P(X) = 4X^3 - g_2X - g_3$ sont elles distinctes ?

4) Soit $\mathcal{C}$ la courbe $\{y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\} \subset \mathbb{C}^2$. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} \setminus \pi(0) & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \pi(z) & \longmapsto & (\wp(z), \wp'(z)) \end{array}$$

est une bijection.

5) Soient $(z, w) \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ et L la droite affine $\{y = ax + b\} \subset \mathbb{C}^2$ passant par $\varphi(z)$ et $\varphi(w)$. Identifier la somme des solutions de l'équation $4x^3 - g_2x - g_3 = (ax+b)^2$.

6) Montrer la formule :

$$\forall z_1 \neq \pm z_2 \ (\Gamma) \quad , \quad \wp(z_1 + z_2) + \wp(z_1) + \wp(z_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)}\right)^2.$$