Christophe Dupont [1]

Exemples de Lattès et domaines faiblement sphériques de $\mathbb{C}^n$

Abstract. We describe the attracting basins of the origin in $\mathbb{C}^{k+1}$ for the polynomial lifts of Lattès examples. We show that the boundary of these bounded pseudoconvex domains is a quotient of a compact spherical hypersurface, and we describe the singularities that appear. These domains are surprising, because they are very close to the ball, and admit non injective proper holomorphic self-maps. We also explicit some Lattès examples in dimension 2.

1 Introduction, notations et résultats

En 1978, S. Pinchuk [Pi] a montré que les auto-applications holomorphes propres des domaines strictement pseudoconvexes bornés de $\mathbb{C}^{k+1}$ sont des automorphismes. Plus généralement, la stricte pseudoconvexité est une obstruction au branchement des applications holomorphes propres entre domaines bornés de $\mathbb{C}^{k+1}$ (cf [DF]).

Il existe bien sûr des domaines pseudoconvexes possédant des auto-applications holomorphes propres non injectives. Une famille d'exemples (contenant le polydisque) est obtenue de la manière suivante. Soit $F : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^{k+1}$ une application polynomiale homogène non dégénérée (i.e. vérifiant $F^{-1}\{0\} = \{0\}$) de degré $d \geq 2$. Le bassin d'attraction de l'origine $\Omega_F := \{z \in \mathbb{C}^{k+1} \, , \lim_{n\to+\infty} F^n(z) = 0\}$ est un domaine borné et disqué. Il est aussi pseudoconvexe, car il s'écrit $\{G_F < 0\}$, où G_F est la fonction *psh* continue sur $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ définie par $G_F := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{d^n} . \log \| F^n \|$. Cette fonction, appelée la fonction de Green de F, vérifie l'identité $G_F \circ F = d.G_F$. En particulier, l'application F (et ses itérées) sont des auto-applications holomorphes propres non injectives de Ω_F. Notons que F induit un endomorphisme holomorphe f sur $\mathbb{P}^k$ via la projection canonique $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^k$. Le courant de Green T de f est défini par la relation $\pi^* T = dd^c G_F$ (cf [FS2], [HP]). C'est un courant positif fermé sur $\mathbb{P}^k$, de bidegré $(1, 1)$.

Dans cet article, nous décrivons précisément le bord du bassin d'attraction Ω_F lorsque F relève un "exemple de Lattès" de $\mathbb{P}^k$. Nous verrons que ce sont des domaines disqués dont le bord est strictement pseudoconvexe (en fait sphérique) en

[1] Christophe Dupont : Laboratoire de Mathématiques Emile Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4.
e-mail : dupont@picard.ups-tlse.fr

Mathematics Subject Classification (2000) : 14K25, 32S25, 32T99, 32H50

dehors de la trace d'un ensemble algébrique projectif. Au vu du théorème de Pinchuk, ces domaines forment une classe surprenante de domaines pseudoconvexes bornés possédant des auto-applications holomorphes propres non injectives. De tels domaines n'existent pas dans la catégorie des domaines de Reinhardt (cf [Be]).

Un exemple de Lattès de $\mathbb{P}^k$ est par définition un endomorphisme holomorphe f de $\mathbb{P}^k$, de degré $d \geq 2$, faisant commuter un diagramme du type :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\sigma"'] & A \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathbb{P}^k \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^k \end{tikzcd}$$

où A est un tore complexe de dimension k, D une application affine et σ un revêtement galoisien (i.e. une application de passage au quotient par un groupe fini G d'automorphismes de A). De tels endomorphismes existent en toute dimension k et pour tout degré d (cf remarque 5.1). Ils sont aussi critiquement finis (cf lemme 5.2).

La partie linéaire de l'application affine D est nécessairement de la forme $\sqrt{d}.U$, où U est une isométrie pour une "bonne" norme de $\mathbb{C}^k$ (cf lemme 3.2). On sait aussi que le tore A est une variété abélienne (car les fibres de σ sont finies), et que le groupe G est induit par un groupe de réflexion de $\mathbb{C}^k$ (cf [TY], Cor. 3.2.2). Notons qu'en dimension 2, la classification des couples (A, G), constitués d'un tore complexe A et d'un groupe d'automorphisme G tels que A/G soit biholomorphe à $\mathbb{P}^2$ est connue (cf [KTY]). Le tore A est alors un produit de tores complexes de dimension 1 (cf section 5.1).

Signalons que les exemples de Lattès ont été caractérisés dans [BL2] par la régularité et la stricte positivité de leur courant de Green (voir aussi [Di]), et dans [Du] par l'absolue continuité (pour la mesure de Lebesgue) de leur mesure d'entropie maximale. Ils apparaissent naturellement dans l'étude des endomorphismes permutables de $\mathbb{P}^k$ (cf [DS]).

Précisons quelques notations avant d'énoncer notre résultat principal. Soit $A = \mathbb{C}^k/\Gamma$ un tore complexe. On note $\dot{x}$ la projection de $x \in \mathbb{C}^k$ sur A. $\mathcal{O}(-1)$ désigne le fibré tautologique sur $\mathbb{P}^k$, et $L(H, \alpha)$ le fibré en droites sur A associé au type (H, α) (cf section 2.3). Un fibré en droites L privé de sa section nulle est noté L^-. On rappelle que la variété $\mathcal{O}(-1)^-$ est biholomorphe à $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ (cf section 2.2). On dira qu'une hypersurface réelle d'une variété complexe de dimension k est sphérique si elle est localement biholomorphe à un ouvert de la sphère euclidienne dans $\mathbb{C}^k$.

Théorème 1.1 *Soit f un exemple de Lattès de $\mathbb{P}^k$ induit par un revêtement galoisien $\sigma : A \to \mathbb{P}^k$ de groupe G. Soit T le courant de Green de f et Ω_F le bassin d'attraction de l'origine d'un de ses relevés polynomiaux F.*

Il existe un fibré en droites $L(H,\alpha)$ sur A de forme hermitienne H définie négative, une hypersurface sphérique compacte Σ dans $L(H,\alpha)$ et un revêtement galoisien $\tilde\sigma : L(H,\alpha)^- \to \mathbb{C}^{k+1}\setminus\{0\}$ induisant σ sur les bases tels que $\tilde\sigma(\Sigma)=\partial\Omega_F$ et $\sigma^*T = -\frac{\pi}{2}dd^cH$.

Si le stabilisateur K de $\dot x_0$ sous l'action de G est trivial, alors le bord de Ω_F est sphérique au voisinage de $z_0=\tilde\sigma\{x_0,u_0\}$. Sinon, il a pour équation :

$$\left\{\,(y,w)\in V\times(\mathbb{C},0)\,,\,\Re(w)-H(\Phi^{-1}(y),\Phi^{-1}(y))=0\,\right\}$$

où V est un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^k$ et $\Phi:\mathbb{C}^k/\vec K\to\mathbb{C}^k$ est un biholomorphisme dont les coordonnées forment une base de l'algèbre des polynômes invariants sous l'action de $\vec K$, le groupe des parties linéaires de K.

Signalons que pour $k=1$, Ueda [U1] avait traité un cas particulier "à la main", et que notre description avait été obtenue dans [BL1] par d'autres méthodes.

Donnons un aperçu de la démonstration. La désingularisation sphérique s'obtient en relevant le diagramme commutatif définissant f aux fibrés en droites $\mathcal{O}(-1)^-\simeq\mathbb{C}^{k+1}\setminus\{0\}$ et $\sigma^*\mathcal{O}(-1)^-\simeq L(H,\alpha)^-$. Il s'agit de construire un morphisme de fibré $\tilde\sigma : L(H,\alpha)\to\mathcal{O}(-1)$ et un morphisme de fibré $\mathcal{D}:L(H,\alpha)\to L(H,\alpha)$ homogène de degré d faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
L(H,\alpha)^- \arrow[rr, "\mathcal{D}"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\tilde\sigma"'] & & L(H,\alpha)^- \arrow[dr] \arrow[dd, "\tilde\sigma"] & \\
& A \arrow[rr, "D"] \arrow[dd, "\sigma"] & & A \arrow[dd, "\sigma"] \\
\mathbb{C}^{k+1}\setminus\{0\} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{C}^{k+1}\setminus\{0\} \arrow[dr, "\pi"'] & \\
& \mathbb{P}^k \arrow[rr, "f"] & & \mathbb{P}^k
\end{tikzcd}$$

Cette démarche, qui nous a été suggérée par J.J. Loeb, peut reposer sur le théorème d'Appell-Humbert, en vertu duquel tout fibré en droites sur A (en particulier $\sigma^*\mathcal{O}(-1)$) est isomorphe à un fibré en droites du type $L(H,\alpha)$. On obtient alors le diagramme de manière formelle, et l'application $\mathcal{D}$ provient d'un morphisme de fibré de $L(H,\alpha)^{\otimes d}$ dans $L(H,\alpha)$.

Dans notre démonstration, nous avons préféré substituer au théorème d'Appell-Humbert le fait classique suivant, dont la preuve est plus simple : les coordonnées de $\sigma:A\to\mathbb{P}^k$ sont des fonctions thêta normalisées de même type $(-H,\alpha^{-1})$. Cette approche présente l'avantage d'être explicite, et de fournir directement $\mathcal{D}$.

La désingularisation sphérique du bord du bassin s'obtient en reliant (au moyen de $\tilde{\sigma}$) la métrique singulière e^{G_F} sur $\mathcal{O}(-1)$ avec une métrique lisse q dont les niveaux sont des hypersurfaces sphériques.

L'étude des singularités du bord du bassin s'effectue en interprétant $\tilde{\sigma}$ comme le passage au quotient de $L(H,\alpha)$ par un groupe fini d'automorphismes de fibré. Nous donnons l'équation des singularités à l'aide de rudiments de la théorie des invariants.

Dans la deuxième partie de l'article, nous exhibons des exemples de Lattès en dimension 2. Soit A_i le tore $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ et T est le groupe d'automorphismes de $A_i \times A_i$ engendré par le groupe $G(4,2,2)$ et la translation de vecteur $(\frac{1+i}{2}, \frac{1+i}{2})$ (cf partie 5.1). Le quotient $A_i \times A_i/T$ est alors biholomorphe à $\mathbb{P}^2$ (cf [KTY]).

Proposition 1.2 *Les endomorphismes suivants sont des exemples de Lattès :*

$$\begin{array}{rccc} & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ f_1: & [x:y:z] & \longmapsto & [(-x+y+z)^2:(x-y+z)^2:(x+y-z)^2] \\ f_2: & [x:y:z] & \longmapsto & [(x-y+z)^2:(-x+y+z)^2:(x+y-z)^2] \\ f_3: & [x:y:z] & \longmapsto & [(x+y-z)^2:(-x+y+z)^2:(x-y+z)^2] \end{array}$$

Ils sont semi-conjugués aux dilatations :

$$D_1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix},\ D_2 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ D_3 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

par le revêtement galoisien $\sigma : A_i \times A_i \to \mathbb{P}^2$ de groupe T.

Ce résultat montre que les endomorphismes étudiés par Ueda (cf [U1], [U2]) sont en fait des exemples de Lattès. La démonstration repose sur des identités fonctionnelles vérifiées par des fonctions thêta.

Nous montrons aussi, grâce à la classification de [KTY], que l'application critiquement finie étudiée par Fornaess-Sibony (cf [FS1]), n'est pas un exemple de Lattès :

Proposition 1.3 *L'endomorphisme critiquement fini*

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ [x:y:z] & \longmapsto & [(x-2y)^2:(x-2z)^2:x^2] \end{array}$$

n'est pas un exemple de Lattès.

Il est naturel de se demander quelles sont les applications holomorphes propres des bassins d'attraction Ω_F associés aux exemples de Lattès. Dans cette perspective, il est utile de savoir qu'un prolongement de l'application au travers du bord existe.

Au voisinage des points sphériques, cela résulte du principe de réflexion de Pinchuk. Au niveau global (et sous des conditions particulières) cela résulte d'un théorème de Bell [B], en vertu duquel les applications holomorphes propres et non dégénérées entre domaines bornés et disqués sont polynomiales. On pourra consulter [BP] pour une généralisation de ce résultat.

2 Fibrés en droites sur les espaces projectifs et les tores complexes

Nous rappelons dans cette partie des propriétés bien connues sur les fibrés en droites. On consultera [GH] ou [De] pour plus de détails.

2.1 Généralités

Soient L, L' deux fibrés en droites sur des variétés complexes X, Y, et $f : X \to Y$ une application holomorphe. Un morphisme homogène de L dans L' de degré d, induisant f sur les bases, est une application holomorphe dont l'expression au dessus d'ouverts de trivialisation $U_\alpha, V_{\alpha'}$ s'écrit :

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbb{C} & \longrightarrow & V_{\alpha'} \times \mathbb{C} \\ (x,t) & \longmapsto & (f(x), d_{\alpha\alpha'}(x).t^d) \end{array}$$

où $d_{\alpha\alpha'}$ est une fonction holomorphe non nulle. Un morphisme de fibré est un morphisme homogène de degré 1. Le principe du maximum entraîne le résultat suivant :

Lemme 2.1 *Soit L un fibré en droites sur une variété complexe compacte connexe X, et $u_i : L \to L, i = 1,2$, deux morphismes homogènes de même degré, induisant f sur X. Alors il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que $u_2 = c.u_1$.*

Soient $f : X \to Y$ une application holomorphe, et L un fibré en droites sur Y muni de la projection $p : L \to Y$. L'image réciproque de L est définie par $f^*L := \{(x,l) \in X \times L, f(x) = p(l)\}$. On note $f_L : f^*L \to L$ le morphisme de fibré défini par $f_L((x,l)) := (f(x), l)$. Le fibré image réciproque jouit de la propriété universelle suivante :

Lemme 2.2 *Tout morphisme de fibré $v : L' \to L$ induisant f sur les bases se factorise par f_L : il existe un isomorphisme de fibrés $\eta : L' \to f^*L$ vérifiant $v = f_L \circ \eta$.*

2.2 Fibrés en droites sur $\mathbb{P}^k$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit le fibré en droites $\mathcal{O}(n)$ sur $\mathbb{P}^k$ comme le quotient de $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ par la relation d'équivalence de classes $[z, v]_n := \{(\lambda z, \lambda^n v), \lambda \in \mathbb{C}^*\}$. Notons que l'application :

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(-1)^- & \longrightarrow & \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \\ [z, v]_{-1} & \longmapsto & v \cdot z \end{array}$$

est un biholomorphisme. Le résultat suivant se déduit des lemmes 2.1 et 2.2 :

Lemme 2.3 *Soit f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$ de degré d, et F un de ses relevés polynomiaux à $\mathbb{C}^{k+1}$. Alors*

1. *$f^*\mathcal{O}(-1)$ est isomorphe à $\mathcal{O}(-1)^{\otimes d}$, c'est à dire à $\mathcal{O}(-d)$.*
2. *Les morphismes homogènes de $\mathcal{O}(-1)$ dans $\mathcal{O}(-1)$ de degré d, induisant f sur $\mathbb{P}^k$, sont de la forme $[z, v]_{-1} \mapsto [F(z), c.v^d]_{-1}$, où $c \in \mathbb{C}^*$.*

2.3 Fibrés en droites sur un tore complexe A

Soit Γ un réseau de $\mathbb{C}^k$ et A le tore $\mathbb{C}^k/\Gamma$. On note $\Pi : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k/\Gamma$ la projection canonique et $\dot{x}$ pour $\Pi(x)$. Rappelons qu'un type associé au réseau Γ est un couple (H, α) constitué
- d'une forme hermitienne H sur $\mathbb{C}^k$, $\mathbb{C}$-linéaire à droite, telle que $\Im H(\Gamma, \Gamma) \subset \mathbb{Z}$
- d'une application $\alpha : \Gamma \to \mathbb{S}^1$, vérifiant $\alpha(\gamma_1 + \gamma_2) = \alpha(\gamma_1)\alpha(\gamma_2)(-1)^{\Im H(\gamma_1, \gamma_2)}$
Un type (H, α) définit une action de Γ sur $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}$ par :

$$\gamma \cdot (x, u) := (x + \gamma, e_\gamma(x).u)$$

où $e_\gamma(x) := \alpha(\gamma).e^{\pi[H(\gamma,x)+\frac{1}{2}H(\gamma,\gamma)]}$. Soit $L(H, \alpha)$ le fibré en droites sur A obtenu comme le quotient de $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}$ par cette action, et $\{x, u\}_{(H,\alpha)}$ ses éléments. Le produit $L(H_1, \alpha_1) \otimes L(H_2, \alpha_2)$ est isomorphe à $L(H_1 + H_2, \alpha_1.\alpha_2)$, et $L(H_1, \alpha_1) \simeq L(H_2, \alpha_2)$ si et seulement si $H_1 = H_2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$. Soit q la métrique sur $L(H, \alpha)$ induite par la fonction $q(x, u) = e^{-\frac{\pi}{2}H(x,x)}|u|$

L'espace des sections holomorphes de $L(H, \alpha)$ est isomorphe à l'ensemble des fonctions thêta normalisées de type (H, α), auquel on ajoute la fonction nulle. Ce sont les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}^k$, non identiquement nulles, vérifiant :

$$\forall z \in \mathbb{C}^k \, , \, \forall \gamma \in \Gamma \, , \, \theta(z + \gamma) = e_\gamma(x).\theta(z)$$

Le fait classique suivant (cf [De], Chap IV, §3) jouera un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 1.1 :

Théorème 2.4 *Toute application holomorphe $\sigma : A \to \mathbb{P}^k$ est induite par une application $\theta = (\theta_0, ..., \theta_k)$ dont les coordonnées sont des fonctions thêta normalisées de même type.*

Une preuve identique à celle du lemme 2.3 fournit :

Lemme 2.5 *Soit $\sigma : A \to \mathbb{P}^k$ induite par les fonctions thêta $\theta = (\theta_0, ..., \theta_k)$ de type (H, α). Les morphismes de fibrés $\phi : L(dH, \alpha^d) \to \mathcal{O}(d)$ induisant σ sur les bases sont de la forme $\phi\{x, u\}_{(dH,\alpha^d)} = [\theta(x), c.u]_d$, où $c \in \mathbb{C}^*$.*

Notons qu'alors $\sigma^*\mathcal{O}(d) \simeq L(dH, \alpha^d)$ par le lemme 2.2. Avant de donner l'analogue du lemme 2.3, introduisons quelques notations.

Définition 2.6 *Soit $\varphi = \vec{\varphi} + \tau$ un endomorphisme de A. Etant donné un type (H, α) associé au réseau Γ, on définit H_φ et α_φ par :*

$$\begin{array}{rrcl} \forall w, w' \in \mathbb{C}^k\,, & H_\varphi(w, w') & := & H(\vec{\varphi}w, \vec{\varphi}w') \\ \forall \gamma \in \Gamma\,, & \alpha_\varphi(\gamma) & := & \alpha(\vec{\varphi}\gamma)e^{2i\pi\Im H(\vec{\varphi}\gamma,\tau)} \end{array}$$

On vérifie que $(H_\varphi, \alpha_\varphi)$ est encore un type, dont on note $(e^\varphi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ les multiplicateurs.

Nous obtenons le lemme suivant :

Lemme 2.7 *Soit $\varphi = \vec{\varphi} + \tau$ un endomorphisme de A. Alors :*

1. *$\varphi^* L(H, \alpha)$ est isomorphe à $L(H_\varphi, \alpha_\varphi)$*
2. *Si $(H_\varphi, \alpha_\varphi) = (dH, \alpha^d)$, on a $e^{\pi H(\tau,\vec{\varphi}\gamma)}.e^d_\gamma(x) = e_{\vec{\varphi}\gamma}(\varphi x)$.*
3. *Il existe des morphismes homogènes de $L(H, \alpha)$ dans $L(H, \alpha)$ de degré d induisant φ sur A si et seulement si $(H_\varphi, \alpha_\varphi) = (dH, \alpha^d)$. Ils sont alors de la forme $\{x, u\}_{(H,\alpha)} \mapsto \{\varphi x, c.e^{\pi H(\tau,\vec{\varphi}x)}.u^d\}_{(H,\alpha)}$, où $c \in \mathbb{C}^*$.*
4. *Soit $\varphi : L(H, \alpha) \to L(H, \alpha)$ un morphisme homogène de degré d. Quitte à multiplier la métrique q par une constante non nulle, on a $q \circ \varphi = q^d$.*

Démonstration : Pour le premier point, on vérifie que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^k \times \mathbb{C} \\ (x, u) & \longmapsto & (\varphi x, e^{\pi H(\tau,\vec{\varphi}x)}.u) \end{array}$$

induit un morphisme de fibré de $L(H_\varphi, \alpha_\varphi)$ dans $L(H, \alpha)$.

Le deuxième point est facile. Passons au troisième. Lorsque $d = 1$, la condition nécessaire provient du lemme 2.2, de l'unicité du type et du premier point. Lorsque $d \geq 2$, on remarque que tout morphisme homogène $L \to L$ de degré d donne naissance à un morphisme de fibré $L^{\otimes d} \to L$ lorsque l'on supprime la puissance d dans les fibres. La condition suffisante provient du point 2 et du lemme 2.1.

Passons au dernier point. Soit $q_\delta := \delta.q$, pour $\delta \in \mathbb{R}$. L'égalité $H_\varphi = dH$ issue du point 3 implique :

$$q_\delta \circ \varphi\{x,u\}_{(H,\alpha)} = \delta.e^{-\frac{\pi}{2}dH(x,x)}.e^{-\frac{\pi}{2}H(\tau,\tau)}.|u^d|$$

Cette expression est égale à $q_\delta^d\{x,u\}_{(H,\alpha)}$ pour $\delta := \left(e^{-\frac{\pi}{2}H(\tau,\tau)}\right)^{\frac{1}{d-1}}$. $\square$

Nous terminons cette partie en explicitant des trivialisations du fibré $L(H,\alpha)$. Fixons U un ouvert de $\mathbb{C}^k$, disjoint de ses translatés par l'action de Γ. L'application $\lambda : \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(U+\gamma) \to \Gamma$ qui à un point x associe l'unique élément $\gamma \in \Gamma$ vérifiant $x+\gamma \in U$ est alors bien définie. Pour toute fonction holomorphe ϵ ne s'annulant pas sur U, nous notons ψ_ϵ la trivialisation suivante du fibré $L(H,\alpha)$ au dessus de $\Pi(U)$:

$$\psi_\epsilon : \begin{array}{ccc} p^{-1}\circ\Pi(U) & \longrightarrow & \Pi(U)\times\mathbb{C} \\ \{x,u\}_{(H,\alpha)} & \longmapsto & \big(\dot{x}, \epsilon(x+\lambda(x)).e_{\lambda(x)}(x).u\big) \end{array}$$

3 Désingularisation sphérique du bord du bassin

Soit $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ un exemple de Lattès et $F : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^{k+1}$ un relevé polynomial de f. On note G_F la fonction de Green, Ω_F le bassin d'attraction de l'origine, et T le courant de Green de f (cf l'introduction). Puisque f est un exemple de Lattès, on dispose d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\sigma"'] & A \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathbb{P}^k \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^k \end{tikzcd}$$

D'après le théorème 2.4, σ est induite par des fonctions thêta normalisées de même type $(-H,\alpha^{-1})$, i.e. $\sigma(\dot{x}) = [\theta(x)]$. L'application $\tilde{\theta}$ suivante est donc un morphisme de fibré (cf lemme 2.5) :

$$\tilde{\theta} : \begin{array}{ccc} L(H,\alpha) & \longrightarrow & \mathcal{O}(-1) \\ \{x,u\}_{(H,\alpha)} & \longmapsto & [\theta(x),u]_{-1} \end{array}$$

En particulier, on a $\sigma^*\mathcal{O}(-1) \simeq L(H,\alpha)$ (cf lemme 2.2)

Notations 3.1 *Dans toute la suite, nous notons $\{x,u\}$ pour $\{x,u\}_{(H,\alpha)}$, et $[z,u]$ pour $[z,u]_{-1}$. Nous confondrons l'endomorphisme D du tore A avec un de ses relevés $\vec{D}+\tau$ à l'espace $\mathbb{C}^k$.*

La forme $-H$ est définie positive, car σ est à fibres finies (cf [De], Chap.IV, Cor. 3.5). Ainsi, une surface de niveau de q est sphérique, i.e. localement biholomorphe à un ouvert de la sphère euclidienne de $\mathbb{C}^{k+1}$. En effet : soit $\{x_0, u_0\} \in \{q = c\}$, U un voisinage de x_0 dans $\mathbb{C}^k$ et log une détermination du logarithme en $\frac{u_0}{c} \neq 0$. Si $v = \frac{2}{\pi}\log(\frac{u}{c})$, l'équation de $\{q = c\}$ au voisinage de $\{x_0, u_0\}$ s'écrit :

$$\{(x, v) \in U \times (\mathbb{C}, v_0)\,,\, \Re(v) - H(x, x) = 0\}$$

On reconnaît l'équation d'un ouvert de la sphère unité de $\mathbb{C}^{k+1}$, dans sa version non bornée (cf [R], Chap.2, §3). Remarquons qu'une hypersurface $\{q = c\}$ est compacte, car elle est fibrée en cercles au dessus de A.

Le lemme qui suit est crucial.

Lemme 3.2 *Avec les notations de la définition 2.6, on a* $(H_D, \alpha_D) = (dH, \alpha^d)$.

Démonstration : La relation $\sigma \circ D = f \circ \sigma$ entraîne $D^*\sigma^*\mathcal{O}(-1) = \sigma^* f^*\mathcal{O}(-1)$. Le lemme 2.3 implique :

$$\sigma^* f^* \mathcal{O}(-1) \simeq \sigma^*\mathcal{O}(-1)^{\otimes d} \simeq L(H, \alpha)^{\otimes d} \simeq L(dH, \alpha^d)$$

D'autre part, le lemme 2.7 donne :

$$D^*\sigma^*\mathcal{O}(-1) \simeq D^* L(H, \alpha) \simeq L(H_D, \alpha_D)$$

L'unicité du type permet de conclure. □

Dans la proposition suivante, nous désingularisons $\partial\Omega_F$ en une hypersurface sphérique de la forme $\{q = c\}$. Le fait que σ s'identifie à un passage au quotient par un groupe fini d'automorphismes de A ne joue ici aucun rôle. Rappelons que Ψ désigne le biholomorphisme $\mathcal{O}(-1)^- \to \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ introduit dans la partie 2.2.

Proposition 3.3 *Il existe* $\mathcal{D} : L(H, \alpha) \to L(H, \alpha)$ *un morphisme homogène de degré* d, *et* F *un relevé polynomial de* f *tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
L(H,\alpha)^- \arrow[rr, "\mathcal{D}"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\tilde\sigma"'] & & L(H,\alpha)^- \arrow[dr] \arrow[dd, "\tilde\sigma"] & \\
& A \arrow[rr, "D"] \arrow[dd] & & A \arrow[dd, "\sigma"] \\
\mathbb{C}^{k+1}\setminus\{0\} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{C}^{k+1}\setminus\{0\} \arrow[dr, "\pi"'] & \\
& \mathbb{P}^k \arrow[rr, "f"] & & \mathbb{P}^k
\end{tikzcd}$$

où $\tilde\sigma$ *désigne l'application* $\Psi \circ \tilde\theta$. *Quitte à normaliser la métrique* q, *on a* $e^{G_F \circ \tilde\sigma} = q$. *On en déduit* $\tilde\sigma\{q = 1\} = \partial\Omega_F$ *et* $\sigma^* T = -\frac{\pi}{2} dd^c H$.

Démonstration : Les lemmes 2.3, 2.7 et 3.2 assurent l'existence des morphismes homogènes de degré d suivant :

$$\begin{array}{rlcl} \mathcal{D}: & \{x,u\} & \longmapsto & \{Dx, e^{\pi H(\tau,\vec{D}x)}.u^d\} \\ \mathcal{F}_c: & [z,v] & \longmapsto & [F(z), c.v^d] \end{array}$$

Nous allons montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que $\tilde{\theta} \circ \mathcal{D} = \mathcal{F}_c \circ \tilde{\theta}$. Cela revient à établir

$$\exists c \in \mathbb{C}^*,\ \forall x \in \mathbb{C}^k,\ c.F \circ \theta(x) = \theta \circ D(x).e^{\pi H(\tau,\vec{D}x)} \tag{3.1}$$

L'identité $\pi \circ \theta \circ D = \pi \circ F \circ \theta$ (provenant de $\sigma \circ D = f \circ \sigma$) détermine une unique fonction holomorphe non nulle $c = c(x)$ vérifiant (3.1) sur $\mathbb{C}^k$. Le calcul suivant, où e_γ est de type (H,α), montre que c est Γ-périodique.

$$\begin{array}{rcl} c(x+\gamma).F\circ\theta(x+\gamma) & = & \theta\circ D(x+\gamma).e^{\pi H(\tau,\vec{D}(x+\gamma))} \\ & = & e^{-1}_{\vec{D}\gamma}(Dx).\theta\circ D(x).e^{\pi H(\tau,\vec{D}x)}.e^{\pi H(\tau,\vec{D}\gamma)} \\ & = & e^{-1}_{\vec{D}\gamma}(Dx).c(x).F\circ\theta(x).e^{\pi H(\tau,\vec{D}\gamma)} \\ & = & e^{-1}_{\vec{D}\gamma}(Dx).c(x).F\circ\theta(x+\gamma).e^{d}_{\gamma}(x).e^{\pi H(\tau,\vec{D}\gamma)} \\ & = & c(x).F\circ\theta(x+\gamma) \end{array}$$

La dernière égalité provient du lemme 2.7-(2). Puisque l'une des composantes de F est non nulle, on a bien $c(x+\gamma) = c(x)$. Cette fonction est donc constante par le théorème de Liouville. On supposera qu'elle vaut 1 quitte à changer F en $c.F$. Le diagramme annoncé se déduit de l'identité $\Psi \circ \mathcal{F}_c = F \circ \Psi$.

D'après les lemmes 2.7-(4) et 3.2, on a $q \circ \mathcal{D} = q^d$ quitte à multiplier la métrique q par un réel δ. Vérifions l'égalité $e^{G_F \circ \tilde{\sigma}} = q$. Soit $\|\,.\,\|$ une norme sur $\mathbb{C}^{k+1}$. Puisque A est une variété compacte, il existe une constante C telle que $\frac{1}{C}.q \leqslant \|\,\tilde{\sigma}\,\| \leqslant C.q$. Les identités $\tilde{\sigma} \circ \mathcal{D}^p = F^p \circ \tilde{\sigma}$, valables pour tout $p \in \mathbb{N}$, impliquent :

$$G_F \circ \tilde{\sigma} = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{d^p}.\log\|\,F^p\circ\tilde{\sigma}\,\| = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{d^p}.\log\|\,\tilde{\sigma}\circ\mathcal{D}^p\,\| = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{d^p}.\log q\circ\mathcal{D}^{d^p}$$

L'égalité $G_F \circ \tilde{\sigma} = \log q$ provient alors de $q \circ \mathcal{D}^p = q^{d^p}$. L'expression de $\tilde{\sigma}$ et l'homogénéité de G_F entraînent $G_F \circ \theta(x) = \log\delta - \frac{\pi}{2}H(x,x)$. On a donc $\sigma^*T = -\frac{\pi}{2}dd^cH$ par l'identité $\pi \circ \theta = \sigma \circ \Pi$. □

Remarque 3.4 *L'égalité $\sigma^*T = -\frac{\pi}{2}dd^cH$ permet de retrouver le caractère défini positif de $-H$. En effet, $-H$ est positive puisque T est un courant positif. Si cette forme était dégénérée, T aurait un potentiel local maximal en dehors de $\sigma(Crit\ \sigma)$. La mesure de probabilité $\mu = T^k$ serait alors portée par $\sigma(Crit\ \sigma)$. Ce n'est pas possible car T possède des potentiels locaux bornés (utiliser l'inégalité de Chern-Levine-Nirenberg, [S], Prop.A.6.3).*

4 Description du bord du bassin

Nous reprenons les notations de la section précédente. Soit $\mathcal{C} := \{\{x, u\}, \dot{x} \in Crit(\sigma)\}$ l'ensemble critique de $\tilde{\sigma}$, et $\mathcal{S}$ ses valeurs critiques. L'application $\tilde{\sigma}$ induit en restriction un revêtement fini de $L(H,\alpha)^- \setminus \mathcal{C}$ dans $\mathbb{C}^{k+1} \setminus (\{0\} \cup \mathcal{S})$. D'après la proposition 3.3, le bord de Ω_F est sphérique en dehors de $\mathcal{S}$. L'objet de cette partie est de décrire le bord de Ω_F en un point $z_0 := \tilde{\sigma}\{x_0, u_0\}$ de $\mathcal{S}$.

Le fait que σ soit un passage au quotient par un groupe fini G d'automorphismes de A est ici crucial. Pour tout élément $g \in G$, on se fixe une application affine $\vec{g} + \kappa$ de $\mathbb{C}^k$ qui induit g sur A. Nous confondrons le plus souvent ces deux applications. Une preuve analogue au lemme 3.2 fournit :

Lemme 4.1 *Pour tout $g \in G$, $(H_g, \alpha_g) = (H, \alpha)$.*

L'étude de $\partial\Omega_F$ en $z_0 := \tilde{\sigma}\{x_0, u_0\}$ repose sur les propriétés géométriques du stabilisateur de $\dot{x_0}$ sous l'action de G. Notons K ce stabilisateur et $\vec{K} := \{\vec{g} \in GL_k(\mathbb{C}),\ g \in K\}$ le groupe des parties linéaires des éléments de K. Quitte à effectuer un changement de coordonnées linéaire, on peut supposer que $\vec{K}$ est un sous-groupe du groupe unitaire $\mathbb{U}_k(\mathbb{C})$. On note $B(0,\nu)$ la boule euclidienne centrée en l'origine et de rayon ν.

Lemme 4.2 *Le groupe $\vec{K}$ est un groupe de réflexion, i.e. il est engendré par des éléments $g \neq Id$ de $GL_k(\mathbb{C})$ fixant point par point un hyperplan de $\mathbb{C}^k$.*

DÉMONSTRATION : Pour ν suffisamment petit, l'ensemble analytique $B(0,\nu)/\vec{K}$ est isomorphe à un ouvert du quotient A/G, qui est biholomorphe à $\mathbb{P}^k$. Il n'est donc pas singulier. Un résultat classique en théorie des singularités stipule alors que $\vec{K}$ est un groupe de reflexion (cf par exemple [Pr], §4). $\square$

Ce lemme entraîne en particulier que l'algèbre des polynômes invariants par $\vec{K}$ est engendrée par k polynômes homogènes $(P_1, ..., P_k)$ algébriquement indépendants (cf [ST], Th.5.1). Ainsi, d'après le théorème de Cartan (cf [C], Th.3), il existe un voisinage de l'origine V dans $\mathbb{C}^k$ tel que l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} B(0,\nu)/\vec{K} & \longrightarrow & V \\ \hat{t} & \longmapsto & y = (P_1, ..., P_k)(\hat{t}) \end{array}$$

soit un biholomorphisme ($\hat{t}$ désigne l'image de t dans $B(0,\nu)/\vec{K}$). Nous utiliserons ces coordonnées sur l'ensemble analytique lisse $B(0,\nu)/\vec{K}$ pour décrire la singularité de Ω_F en z_0.

Vérifions tout d'abord que le bord de Ω_F s'identifie au quotient de $\{q = 1\}$ par un groupe fini d'automorphismes de $L(H,\alpha)$:

Lemme 4.3 *Il existe un groupe $\tilde{G}$ d'automorphismes de $L(H,\alpha)$ tel que l'application $\tilde{\theta}$ s'identifie au passage au quotient de $L(H,\alpha)$ par $\tilde{G}$. L'application ρ qui à $\tilde{g} \in \tilde{G}$ associe l'automorphisme qu'il induit sur A est un isomorphisme de $\tilde{G}$ sur G, et l'action de $\tilde{G}$ laisse invariants les niveaux de q.*

DÉMONSTRATION : D'après le lemme 2.2, il existe un isomorphisme $\eta : L(H,\alpha) \to \sigma^*\mathcal{O}(-1)$ vérifiant $\tilde{\theta} = \sigma_{\mathcal{O}(-1)} \circ \eta$. Par définition, $\sigma_{\mathcal{O}(-1)}$ est l'application de passage au quotient de $\sigma^*\mathcal{O}(-1)$ par le groupe $\mathcal{G} := \{g_{\sigma^*\mathcal{O}(-1)} : \sigma^*\mathcal{O}(-1) \to \sigma^*\mathcal{O}(-1), g \in G\}$. Ainsi, $\tilde{\theta}$ est celle de $L(H,\alpha)$ par le groupe conjugué $\tilde{G} := \eta^{-1} \circ \mathcal{G} \circ \eta$. L'application ρ est clairement un isomorphisme, et $\tilde{\theta}$ est invariante par l'action de $\tilde{G}$. L'égalité $e^{G_F \circ \Psi \circ \tilde{\theta}} = q$ (cf proposition 3.3) montre que les niveaux de q sont invariants par $\tilde{G}$. $\square$

Ainsi, l'action de G sur A se relève (par ρ) en une action d'un groupe $\tilde{G}$ sur $L(H,\alpha)$. Notons $\tilde{K} := \rho^{-1}K$ le relevé de K.

Soit $U := B(x_0,\nu)$, avec ν petit pour que U soit disjoint de ses translatés par l'action du réseau Γ. L'application λ et la trivialisation ψ_ϵ de $L(H,\alpha)$ au dessus de $\Pi(U)$ sont alors bien définies (cf section 2.3).

Le lemme 4.3 stipule qu'étudier le bord de Ω_F en $z_0 := \tilde{\sigma}\{x_0,u_0\}$ revient à étudier le quotient de $\{q=1\}$ au dessus de $\Pi(U)$ par $\tilde{K}$. Pour cela, on exhibe des trivialisations de $L(H,\alpha)$ dans lesquelles $\tilde{K}$ induit l'identité dans les fibres (on dit qu'elles sont $\tilde{K}$-équivariantes) :

Lemme 4.4 *La trivialisation ψ_ϵ est $\tilde{K}$-équivariante si et seulement si ϵ est de la forme $\epsilon_0 \cdot m$, où ϵ_0 est la fonction :*

$$\epsilon_0 : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x_0 + t & \longmapsto & e^{-\pi H(x_0,t)} \end{array}$$

et $m : t \mapsto m(x_0+t)$ est holomorphe non nulle sur $B(0,\nu)$ et $\vec{K}$-invariante.

DÉMONSTRATION : Rappelons l'expression de ψ_ϵ (cf section 2.3) :

$$\psi_\epsilon : \begin{array}{ccc} p^{-1} \circ \Pi(U) & \longrightarrow & \Pi(U) \times \mathbb{C} \\ \{x,u\} & \longmapsto & \big(\dot{x}, \epsilon(x+\lambda(x)).e_{\lambda(x)}(x).u\big) \end{array}$$

Cette trivialisation est équivariante si et seulement si :

$$\forall t \in B(0,\nu),\ \forall g \in K,\ \psi_\epsilon \circ \tilde{g}\{x_0+t,u\} = (g(\dot{x_0}+\dot{t}), \epsilon(x_0+t).u) \tag{4.1}$$

Pour tout $g \in K$, le lemme 2.7 donne l'expression de l'automorphisme $\tilde{g}$ du fibré $L(H,\alpha)$, induisant $g = \vec{g} + \kappa$ sur la base : il existe $\rho(g) \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$\tilde{g} : \begin{array}{ccc} L(H,\alpha) & \longrightarrow & L(H,\alpha) \\ \{x,u\} & \longmapsto & \{g(x), \rho(g).e^{\pi H(\kappa,\vec{g}x)}.u\} \end{array}$$

Ainsi, l'équation (4.1) que l'on doit vérifier devient (on confond g avec l'application affine de $\mathbb{C}^k$ qui l'induit) :

$$\forall g \in K,\ \psi_\epsilon \circ \left\{g(x_0+t), \rho(g).e^{\pi H(\kappa, \vec{g}(x_0+t))}.u\right\} = (g(\dot{x_0+t}), \epsilon(x_0+t).u) \tag{4.2}$$

Pour tout $g \in K$, posons $\gamma_g := \lambda(gx_0)$. On a :

$$\forall t \in B(0,\nu),\ g(x_0+t) = \vec{g}x_0 + \vec{g}t + \kappa = x_0 + \vec{g}t - \gamma_g$$

et donc $\lambda(g(x_0+t)) = \lambda(gx_0) = \gamma_g$ (car $\vec{g} \in \mathbb{U}_k(\mathbb{C})$). Ainsi, par définition de ψ_ϵ, le membre de gauche de (4.2) est égal à :

$$\left(g(\dot{x_0+t}), e_{\gamma_g}(x_0+\vec{g}t-\gamma_g).\epsilon(x_0+\vec{g}t).\rho(g).e^{\pi H(\kappa,\vec{g}(x_0+t))}.u\right)$$

La condition nécessaire et suffisante d'équivariance (4.2) s'écrit alors :

$$\forall t \in B(0,\nu),\ \forall g \in K,\ \frac{\epsilon(x_0+t)}{\epsilon(x_0+\vec{g}t)} = e_{\gamma_g}(x_0+\vec{g}t-\gamma_g).\rho(g).e^{\pi H(\kappa,\vec{g}(x_0+t))} \tag{4.3}$$

Vérifions que l'on a :

$$\forall g \in K,\ e_{\gamma_g}(x_0-\gamma_g).\rho(g).e^{\pi H(\kappa,\vec{g}x_0)} = 1. \tag{4.4}$$

Fixons $g \in K$ et $\gamma := \gamma_g$. L'identité $\tilde{\theta} = \tilde{\theta} \circ \tilde{g}$ donnée par le lemme 4.3 entraîne (avec e_γ de type (H,α) et $\tilde{\theta}$ de type $(-H,\alpha^{-1})$) :

$$\begin{array}{rcl} [\theta(x_0+t),u] & = & [\theta(g(x_0+t)),\rho(g).e^{\pi H(\kappa,\vec{g}(x_0+t))}.u] \\ & = & [\theta(x_0+\vec{g}t-\gamma),\rho(g).e^{\pi H(\kappa,\vec{g}(x_0+t))}.u] \\ & = & [\theta(x_0+\vec{g}t),e_{-\gamma}^{-1}(x_0+\vec{g}t).\rho(g).e^{\pi H(\kappa,\vec{g}(x_0+t))}.u] \end{array}$$

Comme $e_{-\gamma}(x_0).e_\gamma(x_0-\gamma) = e_0(x_0) = 1$, on évalue en $t=0$ pour obtenir (4.4). Ainsi, le membre de droite de (4.3) se simplifie. Il est égal à :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{e_\gamma(x_0+\vec{g}t-\gamma).\rho(g).e^{\pi H(\kappa,\vec{g}(x_0+t))}}{e_\gamma(x_0-\gamma).\rho(g).e^{\pi H(\kappa,\vec{g}x_0)}} & = & \dfrac{e^{\pi H(\gamma,x_0+\vec{g}t-\gamma)}}{e^{\pi H(\gamma,x_0-\gamma)}}.e^{\pi H(\kappa,\vec{g}t)} \\ & = & e^{\pi H(\gamma+\kappa,\vec{g}t)} \\ & = & e^{\pi H(x_0-\vec{g}x_0,\vec{g}t)} \\ & = & e^{-\pi H(\vec{g}x_0,\vec{g}t)}.e^{\pi H(x_0,\vec{g}t)} \\ & = & e^{-\pi H(x_0,t)}.e^{\pi H(x_0,\vec{g}t)} \end{array}$$

La dernière égalité provient de l'invariance de H par $\vec{K}$ (cf lemme 4.2). Ainsi, la trivialisation ψ est équivariante si et seulement si :

$$\forall t \in B(0,\nu),\ \forall g \in K,\ \frac{\epsilon(x_0+t)}{\epsilon(x_0+\vec{g}t)} = \frac{e^{-\pi H(x_0,t)}}{e^{-\pi H(x_0,\vec{g}t)}} \tag{4.5}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que la fonction $\epsilon_0(x_0+t) = e^{-\pi H(x_0,t)}$ vérifie cette équation et que le rapport de deux solutions est une fonction holomorphe non nulle $m : t \to m(x_0+t)$ sur $B(0,\nu)$, invariante par $\vec{K}$. $\square$

Désormais, nous travaillons avec la trivialisation équivariante ψ_{ϵ_0} et la métrique q vérifiant $e^{G_F \circ \tilde{\sigma}} = q$ (cf proposition 3.3). Le calcul suivant :

$$q\left(x_0+t, \epsilon_0(x_0+t)^{-1}.v\right) = \delta.e^{-\frac{\pi}{2}H(x_0+t,x_0+t)}.e^{\pi \Re H(x_0,t)}|v| = \delta.e^{-\frac{\pi}{2}H(x_0,x_0)}.e^{-\frac{\pi}{2}H(t,t)}|v|$$

montre que, quitte à identifier $\Pi(U)$ avec U, et effectuer une translation de vecteur x_0, l'ensemble $\{q=1\}$ au voisinage de $\{x_0,u_0\}$ s'écrit dans la trivialisation ψ_{ϵ_0} :

$$\{(t,v) \in B(0,\nu) \times (\mathbb{C}, v_0)\, ,\, \delta_0.e^{-\frac{\pi}{2}H(t,t)}.|v| = 1\}$$

où $\delta_0 := \delta.e^{-\frac{\pi}{2}H(x_0,x_0)}$ et $v_0 := u_0.\epsilon_0(x_0)$. Puisque dans ces coordonnées, l'action de $\tilde{K}$ s'identifie à celle de $\vec{K}$ sur $B(0,\nu)$ (cf lemme 4.4), le bord de Ω_F au voisinage de z_0 s'écrit :

$$\partial\Omega_F = \{(\hat{t},v) \in B(0,\nu)/\vec{K} \times (\mathbb{C}, v_0)\, ,\, \delta_0.e^{-\frac{\pi}{2}H(\hat{t},\hat{t})}.|v| = 1\}$$

En introduisant le biholomorphisme $\Phi : B(0,\nu)/\vec{K} \to V$ défini au début de cette section, l'équation de $\partial\Omega_F$ en $z_0 = \tilde{\sigma}\{x_0,u_0\}$ devient :

$$\partial\Omega_F = \{(y,v) \in V \times (\mathbb{C}, v_0)\, ,\, \delta_0.e^{-\frac{\pi}{2}H(\Phi^{-1}(y),\Phi^{-1}(y))}.|v| = 1\}$$

Soit log une détermination du logarithme au voisinage de $\delta_0.v_0$ (on a $|\delta_0.v_0| = 1$) et $w := \frac{2}{\pi}\left(\log(\delta_0.v) - \log(\delta_0.v_0)\right)$. L'équation précécente s'écrit alors :

$$\partial\Omega_F = \{(y,w) \in V \times (\mathbb{C}, 0)\, ,\, \Re(w) - H(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(y)) = 0\}$$

Cela achève la démonstration du théorème 1.1.

Remarque 4.5 *On retrouve la description de [BL1]. En effet, en dimension* 1, *le stabilisateur d'un point critique de* σ *est cyclique d'ordre* $m = 2,3,4$ *ou* 6. *L'application* Φ *est alors donnée par* $\hat{t} \mapsto y = \hat{t}^m$ *et l'équation de* $\partial\Omega_F$ *s'écrit* $\partial\Omega_F = \{(y,v) \in (\mathbb{C},0) \times (\mathbb{C},0), |y|^{\frac{2}{m}} = \Re(v)\}$.

5 Exemples de Lattès en dimension 2

5.1 Les couples (A,G) tels que $A/G \simeq \mathbb{P}^2$

Soient $(A_j, G_j), j \in \{1,2\}$ deux couples formés d'un tore complexe et d'un groupe d'automorphismes, vérifiant $A_j/G_j \simeq \mathbb{P}^2$. Nous dirons que (A_1,G_1) et (A_2,G_2) sont isomorphes si il existe un biholomorphisme $h : A_1 \to A_2$ tel que $G_1 = h^{-1}G_2h$. L'objet de ce paragraphe est de rappeler la classification de ces couples à isomorphisme près, établie dans [KTY]. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$ vérifiant $\Im(z) > 0$, on note A_ω le tore $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$. On désigne par $G(m, p, 2)$ le groupe engendré par les reflexions :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2i\pi}{m}} \\ e^{-\frac{2i\pi}{m}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{2ip\pi}{m}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et par $\mathcal{S}_3$ la représentation du groupe de permutations S_3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La liste des couples (A, G) tels que $A/G \simeq \mathbb{P}^2$ (à isomorphisme près) est la suivante :

No	Couple (A, G)	Ordre de G	Valeurs critiques de $\sigma : A \to \mathbb{P}^2$
1	$(A_\omega \times A_\omega, G(2,1,2))$	8	4 droites et une conique
2	$(A_\rho \times A_\rho, G(3,1,2))$	18	3 droites et une conique
3	$(A_i \times A_i, G(4,1,2))$	32	idem
4	$(A_\rho \times A_\rho, G(6,1,2))$	72	idem
5	$\left(A_i \times A_i, \langle G(4,2,2), \frac{1+i}{2}\binom{1}{1}\rangle\right)$	32	6 droites
6	$(A_\omega \times A_\omega, \mathcal{S}_3)$	6	une courbe C

où C est la courbe duale d'une cubique non singulière et $\rho = e^{i\pi/3}$. On a noté $\langle G(4,2,2), \frac{1+i}{2}\binom{1}{1}\rangle$ le groupe d'automorphismes de $A_i \times A_i$ engendré par $G(4, 2, 2)$ et la translation de vecteur $\frac{1+i}{2}\binom{1}{1}$. Nous l'appellerons plus simplement T.

Remarque 5.1 *Chacun des couples de cette liste induit des exemples de Lattès sur $\mathbb{P}^2$ (on peut toujours prendre $D = n.Id$, $n \in \mathbb{Z}$). Observons aussi que la partie linéaire de D n'est pas nécessairement une homothétie. Par exemple, l'endomorphisme $D = n.\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $A_\omega \times A_\omega$ induit un exemple de Lattès pour le couple 1. La proposition 5.3 fournira d'autres exemples.*

Il est possible de construire des exemples de Lattès de tout degré. Par exemple, l'endomorphisme $D = i\sqrt{d}.Id$ de $A_{i\sqrt{d}} \times A_{i\sqrt{d}}$ induit un exemple de Lattès sur $\mathbb{P}^2$ pour le couple 1, de degré d (cf le lemme 3.2).

Remarquons enfin que le premier couple se généralise en toute dimension, en utilisant les biholomorphismes $A_\omega/\pm Id \simeq \mathbb{P}^1$ et $(\mathbb{P}^1)^k/S_k \simeq \mathbb{P}^k$, où S_k est le groupe de permutations de k éléments agissant sur les coordonnées de $(\mathbb{P}^1)^k$.

Les exemples de Lattès donnés dans la section suivante sont associés au couple $(A_i \times A_i, T)$. Etudions ce couple plus en détails. Le groupe T est constitué des 32 éléments suivants, où $\delta \in \{0,1\}$:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} + \delta.\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta.\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix} + \delta.\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \pm i \\ \pm i & 0 \end{pmatrix} + \delta.\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$$

Une expression de l'application de passage au quotient $\sigma : A_i \times A_i \to \mathbb{P}^2$ est donnée par (cf [KTY], §3) :

$$\sigma(x,y) = \left[(\wp_x.\wp_y + \alpha^2)^2 : (\wp_x^2 - \alpha^2)(\wp_y^2 - \alpha^2) : (\wp_x.\wp_y - \alpha^2)^2\right]$$

où $\wp$ est la fonction de Weierstrass associée au réseau $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, et $\alpha = \wp(1/2)$. Cette application peut également s'exprimer en terme de fonctions thêta. Soient $\theta[a\,b]$ les fonctions thêta de Riemann pour le réseau $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ (cf [De], Chap.II, §2). Le diviseur de $\theta[a\,b]$ est égal à $[i(a+\frac{1}{2}) + (b+\frac{1}{2})]$. Si θ_{jk} désigne la fonction $\theta[\frac{j}{2}\ \frac{k}{2}]$, on vérifie que θ_{00}^2 et θ_{11}^2 sont des fonctions thêta de même type. Leur quotient définit donc une fonction méromorphe sur A_i dont le diviseur est celui de $\wp$ (i.e. $2[\frac{1+i}{2}] - 2[0]$). On en déduit $\wp = c.\theta_{00}^2.\theta_{11}^{-2}$ (avec $c \in \mathbb{C}$) et l'expression de σ :

$$\begin{aligned}\sigma(x,y) = \Big[&\left(c^2.\theta_{00}^2(x).\theta_{00}^2(y) + \alpha^2.\theta_{11}^2(x).\theta_{11}^2(y)\right)^2 : (c^2.\theta_{00}^4(x) - \alpha^2.\theta_{11}^4(x))\,. \\ &(c^2.\theta_{00}^4(y) - \alpha^2.\theta_{11}^4(y)) : \left(c^2.\theta_{00}^2(x).\theta_{00}^2(y) - \alpha^2.\theta_{11}^2(x).\theta_{11}^2(y)\right)^2\Big]\end{aligned}$$

L'ensemble critique du revêtement galoisien σ est l'ensemble des points de $A_i \times A_i$ fixés par un élément non trivial de T. On vérifie facilement que cet ensemble est égal à l'orbite, sous l'action du groupe T, des sous-ensembles analytiques irréductibles suivants (on note (x,y) les coordonnées sur $A_i \times A_i$, et on confond les éléments de $\mathbb{C}$ avec leur projection sur A_i) :

$$\begin{array}{ccc} \{y=0\} & \{y=x\} & \{y=ix\} \\ \{y=\frac{1}{2}\} & \{y=x+\frac{1+i}{2}\} & \{y=ix+\frac{1+i}{2}\} \end{array}$$

Dans les coordonnées homogènes $[X:Y:Z]$, les images de ces sous-variétés par σ ont pour équations respectives :

$$\begin{array}{ccc} \{X=Z\} & \{Y=Z\} & \{X=Y\} \\ \{Y=0\} & \{X=0\} & \{Z=0\} \end{array}$$

Nous noterons $\mathcal{E}$ la réunion de ces 6 droites de $\mathbb{P}^2$, formant l'ensemble des valeurs critiques de σ. Observons qu'elles ne sont pas en position générique.

5.2 Quelques exemples de Lattès

Un endomorphisme holomorphe f de $\mathbb{P}^k$ est dit critiquement fini si l'orbite $\mathcal{C}_f := \bigcup_{n\geq 1} f^n(Crit(f))$ de son ensemble critique $Crit(f)$ est algébrique. Les exemples de Lattès vérifient cette propriété :

Lemme 5.2 *Soit f un exemple de Lattès de $\mathbb{P}^k$ vérifiant $\sigma \circ D = f \circ \sigma$. Alors $\mathcal{C}_f$ est contenu dans l'ensemble algébrique des valeurs critiques de σ.*

DÉMONSTRATION : Pour tout $n \geq 1$, on a $\sigma \circ D^n = f^n \circ \sigma$. Si $x \in \mathcal{C}_f$, $f^n \circ \sigma$ branche aux points de $\sigma^{-1}\{x\}$. Puisque D^n est un revêtement, σ branche aux points de $D^n(\sigma^{-1}\{x\})$, et $f^n(x)$ est une valeur critique de σ. $\square$

Nous montrons dans cette partie que les endomorphismes critiquement finis étudiés par Ueda (cf [U1], [U2]) sont des exemples de Lattès.

Proposition 5.3 *Les endomorphismes suivants sont des exemples de Lattès :*

$$\begin{array}{rccc} & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ f_1 : & [x:y:z] & \longmapsto & [(-x+y+z)^2 : (x-y+z)^2 : (x+y-z)^2] \\ f_2 : & [x:y:z] & \longmapsto & [(x-y+z)^2 : (-x+y+z)^2 : (x+y-z)^2] \\ f_3 : & [x:y:z] & \longmapsto & [(x+y-z)^2 : (-x+y+z)^2 : (x-y+z)^2] \end{array}$$

Ils sont semi-conjugués aux dilatations :

$$D_1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix},\ D_2 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ D_3 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

par le revêtement galoisien $\sigma : A_i \times A_i \to \mathbb{P}^2$ de groupe T.

DÉMONSTRATION : La preuve consiste à vérifier les relations $\sigma \circ D_i = f_i \circ \sigma$, où σ désigne l'application de passage au quotient donnée à la section 5.1. Nous utiliserons les identités suivantes, démontrées plus bas :

Lemme 5.4 *Soit $\wp$ est la fonction de Weierstrass associée au réseau $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, et $\alpha = \wp(1/2)$. On a alors :*

1. $\wp_x . \wp_{x+ix} = -\frac{i}{2} . (\wp_x^2 - \alpha^2)$
2. $(\wp_x - \wp_y)^2 . \wp_{x+y} . \wp_{x-y} = (\wp_x . \wp_y + \alpha^2)^2$
3. $(\wp_x - \wp_y)^2 . (\wp_{x+y} + \wp_{x-y}) = 2 . (\wp_x + \wp_y)(\wp_x . \wp_y - \alpha^2)$

Cas de l'endomorphisme f_1 :

Le diviseur des fonctions thêta $c.\theta_{00}^2((1+i).x)$ et $c^2.\theta_{00}^4(x)-\alpha^2.\theta_{11}^4(x)$ vaut $2[\frac{1}{2}]+2[\frac{i}{2}]$. Celui de $\theta_{11}^2((1+i)x)$ et $c.\theta_{00}^2(x).\theta_{11}^2(x)$ vaut $2[0]+2[\frac{1+i}{2}]$. Il existe donc des fonctions thêta non nulle φ_j telles que :

$$\begin{array}{rcl} c.\theta_{00}^2((1+i).x) & = & \varphi_0(x).\left(c^2.\theta_{00}^4(x)-\alpha^2.\theta_{11}^4(x)\right) \\ \theta_{11}^2((1+i)x) & = & \varphi_1(x).c.\theta_{00}^2(x).\theta_{11}^2(x) \end{array}$$

En divisant ces deux expressions, le lemme 5.4-(1) donne $\varphi_0 = -\frac{i}{2}.\varphi_1$. La première coordonnées (signe -) et la dernière coordonnée (signe +) de $\sigma \circ D_1$ s'écrivent alors :

$$\left(-\tfrac{1}{4}.\varphi_1(x).\varphi_1(y)\right)^2 \Big\{(c^2.\theta_{00}^4(x)-\alpha^2.\theta_{11}^4(x))(c^2.\theta_{00}^4(y)-\alpha^2.\theta_{11}^4(y)) \\ \pm 4.\alpha^2.c^2.\theta_{00}^2(x).\theta_{11}^2(x).\theta_{00}^2(y).\theta_{11}^2(y)\Big\}^2$$

et coïncident avec $\left(-\frac{1}{4}.\varphi_1(x).\varphi_1(y)\right)^2.(\sigma_2\pm(\sigma_3-\sigma_1))^2$, où σ_k est la k-ième coordonnée de σ. La deuxième coordonnée de $\sigma \circ D_1$ est égale à :

$$\left(-\tfrac{1}{4}.\varphi_1(x).\varphi_1(y)\right)^2.\left\{(c^2.\theta_{00}^4(x)-\alpha^2.\theta_{11}^4(x))^2+4.\alpha^2.\left(c.\theta_{00}^2(x).\theta_{11}^2(x)\right)^2\right\}. \\ \left\{(c^2.\theta_{00}^4(y)-\alpha^2.\theta_{11}^4(y))^2+4.\alpha^2.\left(c.\theta_{00}^2(y).\theta_{11}^2(y)\right)^2\right\} = \\ \left(-\tfrac{1}{4}.\varphi_1(x).\varphi_1(y)\right)^2.\Big(\left(c^2.\theta_{00}^4(x)+\alpha^2.\theta_{11}^4(x)\right).\left(c^2.\theta_{00}^4(y)+\alpha^2.\theta_{11}^4(y)\right)\Big)^2$$

et coïncide avec $\left(-\frac{1}{4}.\varphi_1(x).\varphi_1(y)\right)^2.(\sigma_1-\sigma_2+\sigma_3)^2$.

Cas de l'endomorphisme f_2 :
Nous travaillons ici avec l'expression de σ en terme de la fonction $\wp$. D'après le lemme 5.4-(2), les premières et dernières coordonnées de $\sigma \circ D_2$, multipliées par $(\wp(x)-\wp(y))^4$, s'écrivent

$$(\wp_x-\wp_y)^4\left(\wp_{x+y}.\wp_{x-y}\pm\alpha^2\right)^2 = \left(\left(\wp_x.\wp_y+\alpha^2\right)^2\pm\alpha^2.\left(\wp_x-\wp_y\right)^2\right)^2$$

et coïncident avec $(\sigma_1\pm(\sigma_3-\sigma_2))^2$. Pour la deuxième coordonnée, on utilise le lemme 5.4-(2),(3) :

$$(\wp_x-\wp_y)^4.(\wp_{x+y}-\alpha).(\wp_{x-y}-\alpha).(\wp_{x+y}+\alpha).(\wp_{x-y}+\alpha) = \\ (\wp_x-\wp_y)^4.\left(\left(\wp_{x+y}.\wp_{x-y}+\alpha^2\right)^2-\alpha^2.\left(\wp_{x+y}+\wp_{x-y}\right)^2\right) = \\ ((\wp_x.\wp_y+\alpha^2)^2+\alpha^2.(\wp_x-\wp_y)^2)^2-4\alpha^2.\left(\wp_x+\wp_y\right)^2\left(\wp_x.\wp_y-\alpha^2\right)^2 = \\ ((\wp_x.\wp_y-\alpha^2)^2-\alpha^2.(\wp_x+\wp_y)^2)^2 = (\sigma_3+(\sigma_2-\sigma_1))^2$$

Cas de l'endomorphisme f_3 :

La vérification se déduit de l'expression de f_2 et de l'identité :

$$\wp(i(x-y)) = -\wp(x-y)$$

Les première et dernière coordonnées de $\sigma \circ D_3$ sont permutées, et la deuxième reste inchangée. $\square$

Démonstration du lemme 5.4 : Toutes ces identités s'obtiennent à l'aide des relations classiques :

$$\wp_x'^2 = 4.\wp_x.(\wp_x^2 - \alpha^2)\ ,\ \wp_{ix} = -\wp_x\ ,\ \wp_{-x} = \wp_x$$

et de la formule d'addition de Weierstrass :

$$(\wp_x - \wp_y)^2.\wp_{x+y} = \frac{1}{4}(\wp_x' - \wp_y')^2 - (\wp_x + \wp_y)(\wp_x - \wp_y)^2$$

La première identité est facile. La deuxième se déduit du calcul :

$$\begin{aligned}
&(\wp_x - \wp_y)^2.\wp_{x+y}.(\wp_x - \wp_y)^2.\wp_{x-y} = (\wp_x - \wp_y)^2.\wp_{x+y}.(\wp_x - \wp_{-y})^2.\wp_{x-y} = \\
&\left(\tfrac{1}{4}(\wp_x' - \wp_y')^2 - (\wp_x + \wp_y)(\wp_x - \wp_y)^2\right)\left(\tfrac{1}{4}(\wp_x' - \wp_{-y}')^2 - (\wp_x + \wp_{-y})(\wp_x - \wp_{-y})^2\right) = \\
&\left(\tfrac{1}{4}(\wp_x'^2 + \wp_y'^2) - (\wp_x + \wp_y)(\wp_x - \wp_y)^2\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}.\wp_x'.\wp_y'\right)^2 = \\
&\left(\wp_x.(\wp_x^2 - \alpha^2) + \wp_y.(\wp_y^2 - \alpha^2) - (\wp_x + \wp_y)(\wp_x - \wp_y)^2\right)^2 - 4\wp_x.\wp_y.(\wp_x^2 - \alpha^2)(\wp_y^2 - \alpha^2) = \\
&\left(\wp_x^3 - \alpha^2.\wp_x + \wp_y^3 - \alpha^2.\wp_y - (\wp_x + \wp_y)(\wp_x^2 - 2\wp_x.\wp_y + \wp_y^2)\right)^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - 4\wp_x.\wp_y.(\wp_x^2 - \alpha^2)(\wp_y^2 - \alpha^2) = \\
&\left(\wp_x.(\wp_y^2 - \alpha^2) + \wp_y.(\wp_x^2 - \alpha^2)\right)^2 - 4\wp_x.\wp_y.(\wp_x^2 - \alpha^2)(\wp_y^2 - \alpha^2) = \\
&\left(\wp_x.(\wp_y^2 - \alpha^2) - \wp_y.(\wp_x^2 - \alpha^2)\right)^2 = (\wp_x - \wp_y)^2\left(\wp_x.\wp_y + \alpha^2\right)^2
\end{aligned}$$

La dernière identité s'obtient de la même manière. $\square$

Remarque 5.5 *Des calculs analogues sont menés dans [U1] pour l'endomorphisme f_1. Notre apport est de traiter les endomorphismes f_2, f_3 et d'utiliser [KTY] afin de montrer que f_1, f_2 et f_3 sont des exemples de Lattès.*

5.3 Etude de l'exemple de Lattès f_1

Dans ce paragraphe, nous étudions l'exemple de Lattès

$$f_1 : [x : y : z] \longmapsto [(-x+y+z)^2 : (x-y+z)^2 : (x+y-z)^2]$$

Il est associé au revêtement galoisien $\sigma : A_i \times A_i \to \mathbb{P}^2$ de groupe T et d'ordre 32. Par le lemme 5.2, nous savons que l'orbite $\mathcal{C}_{f_1}$ de l'ensemble critique de f_1 est contenue dans l'ensemble des valeurs critiques de σ, i.e. les 6 droites $\mathcal{E}$ (cf section 5.1). Plus précisément, la dynamique de l'ensemble critique de f_1 est la suivante :

$$\{-X+Y+Z=0\} \longrightarrow \{X=0\} \longrightarrow \{Y=Z\} \longrightarrow \{Y=Z\}$$

$$\{X-Y+Z=0\} \longrightarrow \{Y=0\} \longrightarrow \{X=Z\} \longrightarrow \{X=Z\}$$

$$\{X+Y-Z=0\} \longrightarrow \{Z=0\} \longrightarrow \{X=Y\} \longrightarrow \{X=Y\}$$

Observons que f_1 induit un exemple de Lattès de dimension 1 en restriction à la droite invariante $\{X=Z\}$. En effet, le sous tore $\{y=0\}$ de $A_i \times A_i$ est invariant par D_1, et son image par σ est la droite $\{X=Z\}$ (cf section 5.1). Nous disposons donc du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\{y=0\} \arrow[r, "D_1"] \arrow[d, "\sigma"'] & \{y=0\} \arrow[d, "\sigma"] \\
\{X=Z\} \arrow[r, "f_1"] & \{X=Z\}
\end{tikzcd}$$

En restriction à $\{y=0\}$, σ (i.e l'action du groupe T) s'identifie au passage au quotient par $\{\pm Id, \pm i.Id\}$, et D_1 est la multiplication par $\sqrt{2}.e^{\frac{i\pi}{4}}$. Si l'on paramètre la droite $\{X=Z\}$ par $[u:v] \mapsto [u:v:u]$, l'exemple de Lattès induit par f_1 sur $\{X=Z\}$ a pour expression $[u:v] \to [v^2:(2u-v)^2]$. On vérifie de même que f_1 induit des exemples de Lattès sur les droites invariantes $\{Y=Z\}$ et $\{X=Y\}$.

Examinons à présent le bassin d'attraction Ω_F d'un relevé polynomial F de f_1. D'après le théorème 1.1, le bord de Ω_F est sphérique en dehors des 6 hyperplans définis par les droites projectives $\mathcal{E}$. L'ensemble singulier $\partial\Omega_F \cap \mathcal{E}$ est connexe par arcs. En effet, soient $(m,m') \in \partial\Omega_F \cap \mathcal{E}$, et γ un chemin continu d'extrémités m et m', tracé sur $\mathcal{E} \setminus \{0\}$. Le chemin continu $e^{-G_F\circ\gamma}.\gamma$ est alors tracé sur $\partial\Omega_F \cap \mathcal{E}$ et a pour extrémités m et m'.

Afin d'illustrer le théorème 1.1, donnons une équation de la singularité du bord de Ω_F en $z_0 = \tilde{\sigma}\{0,u_0\}$. Le stabilisateur de l'origine de $A_i \times A_i$, noté S, coïncide avec le sous-groupe des applications linéaires de T, qui est d'ordre 16. D'après le théorème 3.13 de [F], une base de $\mathbb{C}[X,Y]^S$ consiste en la donnée de deux polynômes homogènes (P,Q) dont la jacobienne n'est pas identiquement nulle, et tels que le produit de leur degré soit égal au cardinal du groupe S. Les polynômes $P(X,Y) = (X^2+Y^2)^2$ et $Q(X,Y) = X^2Y^2$ vérifient ces deux conditions. On obtient alors l'expression suivante pour Φ :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^2,0)/S & \to & (\mathbb{C}^2,0) \\ (X,Y) & \mapsto & (\theta_1 = (X^2+Y^2)^2, \theta_2 = X^2Y^2) \end{array}$$

Les relations coefficients-racines d'un polynôme du second degré fournissent $X^2, Y^2 \in \left\{\left(\sqrt{\theta_1} \pm \sqrt{\theta_1 - 4\theta_2}\right)/2\right\}$. D'autre part, la forme H est un multiple de la forme standard, puisqu'elle est invariante par $G(4,2,2)$ (cf lemme 3.2). Une équation du bord de Ω_F en $z_0 = \tilde{\sigma}\{0, u_0\}$ s'écrit donc :

$$\partial\Omega_F = \left\{(\theta, v) \in (\mathbb{C}^2, 0) \times (\mathbb{C}, 0), \left|\sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_1 - 4\theta_2}\right| + \left|\sqrt{\theta_1} - \sqrt{\theta_1 - 4\theta_2}\right| = \Re(v)\right\}$$

5.4 Un endomorphisme critiquement fini qui n'est pas un exemple de Lattès

Nous montrons ici à l'aide de la classification de [KTY] que l'endomorphisme critiquement fini étudié par Fornaess-Sibony [FS1] n'est pas un exemple de Lattès.

Proposition 5.6 *L'endomorphisme critiquement fini :*

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \to & \mathbb{P}^2 \\ [x : y : z] & \mapsto & [(x-2y)^2 : (x-2z)^2 : x^2] \end{array}$$

n'est pas un exemple de Lattès.

Démonstration : Regardons la dynamique de l'ensemble critique de g dont les composantes sont $\{X = 0\}, \{2Y = X\}, \{2Z = X\}$:

$$\begin{tikzcd}
\{X=0\} \arrow[r] & \{Z=0\} \arrow[r] & \{Y=Z\} \arrow[r] & \{X=Y\} \arrow[dl] \\
\{2Y=X\} \arrow[u] & & \{X=Z\} \arrow[u] & \\
\{2Z=X\} \arrow[r] & \{Y=0\} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

L'orbite $\mathcal{C}_g$ du lieu critique de g contient 6 droites. On en déduit, d'après le lemme 5.2, que si g était un exemple de Lattès, alors il est nécessairement associé à la situation 5 de la classification (ce couple est le seul dont les valeurs critiques du passage au quotient contiennent au moins 6 droites). Supposons donc qu'il existe $D : A_i \times A_i \to A_i \times A_i$ tel que $g \circ \sigma = \sigma \circ D$, où σ désigne l'application de passage au quotient définie à la proposition 5.3, et cherchons une contradiction.

Soient $E := \{(x, x + \frac{1+i}{2})\}$ et $F := \{(x, ix + \frac{1+i}{2})\}$. Ces composantes irréductibles de l'ensemble critique de σ vérifient (cf section 5.1) :

$$\sigma(E) = \{X = 0\} \text{ et } \sigma(F) = \{Z = 0\} \tag{5.1}$$

Observons que le stabilisateur d'un point générique de E (resp. F) est égal à :

$$\left\{Id, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}\right\} \qquad \text{resp. } \left\{Id, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}\right\}$$

Si g était un exemple de Lattès, alors le diviseur $D(E)$ serait contenu dans $G.F := \{h(F), h \in G\}$. En effet, d'après la dynamique de l'ensemble critique de g et (5.1), on a :

$$\forall x \in E\ ,\ \sigma \circ D(x) = g \circ \sigma(x) \in g \circ \sigma(E) = \{Z = 0\} = \sigma(F)$$

Puisque les ensembles analytiques E et F sont irréductibles, $D(E)$ est aussi irréductible, et $\bigcup_{h \in G} h(F)$ est la décomposition de $G.F$ en ensembles irréductibles. Par conséquent, il existe $h \in G$ vérifiant $D(E) = h(F)$ et tel que :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\sigma"'] & h(F) \arrow[d, "\sigma"] \\ \{X = 0\} \arrow[r, "g"] & \{Z = 0\} \end{tikzcd}$$

Comme le stabilisateur d'un point générique de $h(F)$ est d'ordre 2 (les stabilisateurs des points de F et $h(F)$ sont conjugués), on obtient une contradiction lorsque l'on compare les multiplicités dans ce diagramme au voisinage de E. D'une part, $g \circ \sigma$ est génériquement d'ordre strictement supérieur à 2 car le stabilisateur de E est d'ordre 2 et $\{X = 0\}$ est dans l'ensemble critique de g. D'autre part $\sigma \circ D$ est génériquement d'ordre 2, puisque D ne branche pas. Ainsi, g n'est pas un exemple de Lattès. $\square$

Remarque 5.7 *Un calcul montre que les valeurs propres de la différentielle de g au point fixe répulsif $[1:1:1]$ sont différentes (elles valent $-4e^{i\pi/3}$ et $-4e^{-i\pi/3}$). Cependant, cela n'implique pas que g n'est pas un exemple de Lattès. Par exemple, les valeurs propres de la différentielle de l'exemple de Lattès f_2 (cf proposition 5.3) au même point $[1:1:1]$ sont distinctes (4 et -4). Cela provient du fait que l'application D_2 induisant f_2 n'est pas une homothétie : ses valeurs propres sont $\pm\sqrt{2}$. Notons aussi qu'il existe des exemples de Lattès induits par des applications linéaires de valeurs propres multiples de $e^{\pm i\pi/3}$ (par exemple, $D = n.\begin{pmatrix} e^{i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/3} \end{pmatrix}$ pour le couple 4 de la classification de [KTY]).*

Remerciements : Je remercie F. Berteloot et J.J. Loeb pour avoir manifesté de l'intérêt pour ce travail. Je remercie également le referee, dont les remarques ont fortement contribué à améliorer la rédaction de cet article.

Références

[B] Bell, S. : *Proper holomorphic maps between circular domains,* Comm. Math. Helvetici, **57**, 532-538 (1982).

[Be] Berteloot, F. : *Holomorphic vector fields and proper holomorphic self-maps of Reinhardt domains,* Ark. Math., **36**, 241-254 (1998).

[BL1] Berteloot, F., Loeb, J.J. : *Spherical hypersurfaces and Lattès rational maps,* J. Math. Pures App., **77** , 655-666 (1998).

[BL2] Berteloot, F., Loeb, J.J. : *Une caractérisation géométrique des exemples de Lattès de* $\mathbb{CP}^k$*,* Bull. Soc. Math. France, **129**, 175-188 (2001).

[BP] Berteloot, F., Patrizio, G. : *A Cartan theorem for proper holomorphic mappings of complete circular domains,* Advances in Math., **153**, 342-352 (2000).

[C] Cartan, H. : *Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes,* in Algebraic Geometry and Algebraic Topology, A Symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton, 90-102 (1957).

[De] Debarre, O. : *Tores et variétés abéliennes complexes,* Cours Spécialisés **6**, SMF et EDP Sciences (1999).

[DF] Diederich, K., Fornaess, J.E. : *Proper holomorphic images of strictly pseudoconvex domains,* Math. Ann., **259**, 279-286 (1982).

[Di] Dinh, T.C. : *Sur les applications de Lattès de* $\mathbb{P}^k$*,* J. Math. Pures App., **80**, 577-592 (2001).

[DS] Dinh, T.C., Sibony, N. : *Sur les endomorphismes holomorphes permutables de* $\mathbb{P}^k$*,* Math. Ann., **324**, 33-70 (2002).

[Du] Dupont, C. *Propriétés extrémales et caractéristiques des exemples de Lattès,* Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier, Toulouse (2002).

[F] Flatto, L. : *Invariants of finite reflection groups,* Enseign. Math. (2), **24**, No 3-4, 237-292 (1978).

[FS1] Fornaess, J.E., Sibony, N. : *Critically Finite Rational maps on* $\mathbb{P}^2$*,* Contemp. Math., **137**, 245-260 (1992).

[FS2] Fornaess, J.E., Sibony, N. : *Complex Dynamics in higher dimensions,* in Complex potential theory (Montréal, PQ, 1993), NATO ASI series Math. and Phys. Sci., **439**, Kluwer Acad. Publ., 131-186 (1994).

[GH] Griffiths, P., Harris J. : *Principles of Algebraic Geometry,* New York, Wiley (1978).

[HP] Hubbard J.H., Papadopol P. : *Superattractive fixed points in* $\mathbb{C}^n$*,* Indiana Univ. Math. J., **43**, 321-365 (1994).

[KTY] Kaneko, J., Tokunaga, S., Yoshida, M. : *Complex crystallographic groups II,* J. Math. Soc. Japan, **34**, No 4, 595-605 (1982).

[Pi] Pinchuk, S. : *Proper holomorphic mappings of strictly pseudoconvex domains,* Dokl. Akad. Nauk SSSR, **241**, 30-33 (1978).

[Pr] Prill, D. : *Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups,* Duke Math. J., **34**, 2, 375-386 (1967).

[R] Rudin, W. : *Function theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$*,* Grund. Math. Wiss. No 241, New York, Heidelberg, Berlin, Springer (1980).

[ST] Shephard, G.C. and Todd, J.A. : *Finite unitary reflection groups,* Canadian J. Math., **6**, 274-304 (1954).

[S] Sibony, N. : *Dynamique des applications rationnelles de* $\mathbb{P}^k$*,* in Dynamique et Géométrie Complexes, Panoramas et Synthèses **8**, SMF (1999).

[TY] Tokunaga, S., Yoshida, M. : *Complex crystallographic groups I,* J. Math. Soc. Japan, **34**, No 4, 581-593 (1982).

[U1] Ueda, T. : *Complex dynamical systems on projective spaces,* in Advanced Series in Dynamical Systems, **13**, Chaotic Dynamical Systems, World Scientific Publ., 120-138 (1993).

[U2] Ueda, T. : *Critical orbits of holomorphic maps on projective spaces,* J. Geom. Anal., **8**, No 2, 319-334 (1998).