Formule de Pesin et applications méromorphes

Christophe Dupont

26 décembre 2005

Résumé

Let f be a dominant meromorphic self-map of a compact Kähler manifold X and μ be an ergodic invariant measure with positive Lyapounov exponents. Suppose also that the quasiplurisubharmonic functions are μ-integrable. We prove that μ is absolutely continuous with respect to the volume measure if μ satisfies the Pesin's formula.

2000 MSC : 37C40, 37F10, 32H50.
Key Words : Pesin's formula, Lyapounov exponents, meromorphic dynamics.

1 Introduction

Soient X une variété compacte riemannienne de dimension k, f un difféomorphisme de X et μ une mesure de probabilité invariante et ergodique. L'entropie $h_\mu(f)$ et les exposants de Lyapounov $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de μ sont reliés par l'inégalité de Margulis-Ruelle [Ru1] :

$$h_\mu(f) \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i.$$

De nombreux travaux s'intéressent aux mesures satisfaisant l'égalité, appelée *formule de Pesin*. Pesin a montré dans [P2] que cette formule est satisfaite lorsque μ est absolument continue par rapport à la mesure volume sur X (*cf.* aussi l'article de Mañé [Ma]). Ledrappier et Strelcyn [LS] ont ensuite généralisé ce résultat : l'égalité a encore lieu lorsque μ est *absolument continue par rapport au feuilletage instable*, *i.e.* lorsque les mesures conditionnelles de μ le long des variétés instables possèdent une densité. Cette condition est en fait nécessaire, comme l'ont démontré Ledrappier et Young [LY] (*cf.* aussi [L3]).

L'inégalité de Margulis-Ruelle reste valable lorsque f n'est plus inversible. Dans ce contexte, Ledrappier a étudié le cas des transformations de l'intervalle [L1] et celui des fractions rationnelles sur $\mathbb{P}^1$ [L2] : ici encore, la formule de Pesin est satisfaite si et seulement si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Plus récemment, Qian et Zhu [QZ] ont étendu ce résultat au cas d'endomorphismes de classe C^2 dont le logarithme du jacobien est μ-intégrable. Cet article concerne les applications méromorphes, nous obtenons la généralisation suivante du théorème de Ledrappier [L2] :

Théorème 1.1 *Soient X une variété compacte complexe de dimension k muni d'une forme de Kähler ω. Soient $f : X \to X$ une application méromorphe, μ une mesure f-invariante ergodique qui intègre les fonctions quasi-plurisousharmoniques et dont les exposants $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ sont strictement positifs. Si l'égalité $h_\mu(f) = 2\sum_{j=1}^{k} \lambda_j$ est satisfaite, alors μ est absolument continue par rapport à la mesure volume sur X.*

Nous présentons à la section 2.2 une famille de systèmes (X, f, μ) vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Elle contient en particulier les systèmes $(\mathbb{P}^k, f, \mu)$, où f est un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$ de degré algébrique $d \geq 2$ et μ la mesure d'équilibre de f (*cf.* l'article de Sibony [S] pour une étude de la dynamique de ces applications). La définition des fonctions quasi-plurisousharmoniques (*qpsh*) est rappelée à la section 2.1. Leur intégrabilité entraîne l'existence des exposants de μ ainsi que l'intégrabilité des fonctions du type $\log \mathrm{dist}\,(., \mathcal{J})$ où $\mathcal{J}$ est un sous-ensemble analytique de X. Cette propriété découle du fait que X est kählérienne (*cf.* section 2.1). Notons aussi que le facteur 2 dans la formule de l'énoncé provient du caractère complexe des exposants de μ.

Dans le cas particulier des systèmes $(\mathbb{P}^k, f, \mu)$, l'entropie de μ est égale à $k \log d$ et ses exposants sont minorés par $\log \sqrt{d}$ [BD1]. Le théorème 1.1 montre donc que μ est absolument continue lorsque ses exposants sont minimaux. Au vu des résultats de [BDu] (théorème 1) et [DD] (corollaire 1.4), nous obtenons :

Théorème 1.2 *Soient f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$ de degré algébrique $d \geq 2$ et μ sa mesure d'équilibre. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La dimension de μ est maximale, égale à $2k$.*
2. *Les exposants de μ sont minimaux, égaux à $\log \sqrt{d}$.*
3. *La mesure μ est absolument continue.*
4. *f est un exemple de Lattès.*

Rappelons que la dimension de μ est la borne inférieure des dimensions de Hausdorff des boréliens de μ-mesure totale et qu'un exemple de Lattès est un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ faisant commuter un diagramme du type :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\sigma"'] & A \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathbb{P}^k \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^k \end{tikzcd}$$

où A est un tore complexe de dimension k, D une dilatation affine et σ un revêtement galoisien fini. Il existe de tels endomorphismes en toute dimension k et de tout degré d (*cf.* [D], remarque 4.5). Ils généralisent les fractions rationnelles introduites par Lattès [La] en dimension 1 (*cf.* l'article de Milnor [Mi]). Notons que Cantat [Ca] a étendu l'implication $3 \Rightarrow 4$ au cadre des transformations rationnelles des surfaces complexes compactes kählériennes, en adoptant une définition plus générale pour les exemples de Lattès.

La démonstration du théorème 1.1 reprend la stratégie de Ledrappier [L1], [L2] en dimension 1 (*cf.* aussi [L3], [LS], [LY] et [P1]). Nous travaillons dans $\widehat{X}$, l'espace des orbites de f, dont on note $\hat{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ les éléments. Soient $\pi_0 : \widehat{X} \to X$ la projection définie par $\pi_0(\hat{x}) = x_0$ et ν la mesure sur $\widehat{X}$ vérifiant $\mu = \pi_{0*}(\nu)$ (*cf.* section 2.3). Il s'agit de montrer que les mesures conditionnelles de ν relativement à une *partition de Pesin* η de $\widehat{X}$ sont absolument continues. Il s'ensuit que la mesure image $\mu = \pi_{0*}(\nu)$ est elle aussi absolument continue.

La construction de la partition η fait l'objet de la proposition 1.3 ci-dessous. Elle repose sur l'existence des variétés instables locales de f. Nous introduirons celles-ci à l'aide des branches inverses des itérés de f le long d'orbites typiques (*cf.* section 3.1). En particulier, nous ne ferons pas appel à la théorie de Pesin. Dans le cadre holomorphe, l'existence de ces branches inverses a été établie par Briend-Duval [BD1]. Dans le cadre méromorphe, une difficulté apparaît avec l'ensemble d'indétermination $\mathcal{I}$ de f. Nous la traitons grâce à la régularité de μ : l'intégrabilité des fonctions *qpsh* nous assure qu'une orbite négative typique s'approche lentement de l'ensemble analytique $\mathcal{I}$ (*cf.* [DD], et aussi [DS1]).

Notons que l'extension naturelle $(\widehat{X}, g, \nu)$ présente l'avantage d'être un système dynamique *inversible* (g est le décalage à gauche). Nous appliquerons le théorème de Birkhoff à g et à son inverse g^{-1} dans les démonstrations des propositions 4.1 et 1.3-(6). De plus, les égalités $h_\mu(f) = h_\nu(g) = h_\nu(g^{-1})$ seront cruciales dans la preuve de la proposition 1.3-(4).

Avant d'esquisser la démonstration, précisons comment est organisé l'article. La deuxième partie est destinée à préciser les notations et le cadre de travail. Nous introduisons dans le paragraphe suivant les variétés instables locales de f. La construction de la partition η et la démonstration de la proposition 1.3 ci-dessous occupent le quatrième paragraphe. On donne ensuite la démonstration du théorème 1.1. Nous conseillons le lecteur de commencer par l'appendice, où sont rappelés les résultats classiques de théorie ergodique utilisés.

Donnons à présent quelques éléments de démonstration. La proposition suivante est au cœur de la preuve, les notations sont précisées juste après l'énoncé.

Proposition 1.3 *Il existe une partition mesurable η de $\widehat{X}$ telle que pour ν-presque tout $\hat{x}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

1. *π_0 est injective sur $\eta_{\hat{x}}$.*
2. *f^n est injective sur $\pi_0\ (g^{-n}\eta)_{\hat{x}}$.*
3. *$\eta_{\hat{x}}$ est constitué d'une famille dénombrable d'atomes de $g^{-n}\eta$.*
4. *$h_\nu(g^n) = H(g^{-n}\eta \mid \eta)$.*
5. *La σ-algèbre engendrée par les σ-algèbres $(\mathcal{M}(g^{-n}\eta))_{n\geq 0}$ coïncide avec $\mathcal{M}$.*
6. *La fonction*
$$L(\hat{x}) := \int_{\pi_0(\eta_{\hat{x}})} \Delta(\hat{x}, \sigma_{\hat{x}}(y))\, dm(y)$$
vérifie $0 < L(\hat{x}) < +\infty$ pour ν-presque tout $\hat{x} \in \widehat{X}$.

La mesure m est la mesure volume induite par la forme de Kähler ω sur X, et la fonction $\mathrm{Jac}\, f$ est le jacobien de l'application f. On désigne par $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}(g^{-n}\eta)$) la σ-algèbre de $\widehat{X}$ engendrée par les ν-négligeables et par les boréliens (resp. par les boréliens *réunion* d'atomes de la partition $g^{-n}\eta$). L'entropie conditionnelle d'une partition ζ par rapport à une partition ξ est notée $H(\zeta \mid \xi)$. La fonction $\Delta(\hat{x}, .)$ est définie par

$$\Delta(\hat{x}, .) : \begin{array}{ccc} \eta_{\hat{x}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \hat{y} & \longmapsto & \Delta\left(\hat{x}, \hat{y}\right) := \prod_{p\geq 1} \frac{\mathrm{Jac}\, f(x_{-p})}{\mathrm{Jac}\, f(y_{-p})} \end{array}$$

où $\eta_{\hat{x}}$ est l'atome de la partition η contenant $\hat{x}$. L'application $\sigma_{\hat{x}}$ est l'inverse de π_0 en restriction à l'atome $\eta_{\hat{x}}$ (bien défini par le point 1).

Nous verrons que la partition η est définie comme le joint d'une famille de partitions $(g^n\xi)_{n\geq 0}$, où ξ est l'intersection d'une union $\mathcal{A}$ de variétés instables locales avec le tiré en arrière par π_0 d'une partition $\mathcal{P}$ de X. L'endomorphisme f est injectif sur les atomes de $\mathcal{P}$ (par construction, *cf.* section 2.4), ce qui entraîne les points 1 et 2. Le caractère générateur de la partition ξ (*cf.* lemme 4.1) donne les points 4 et 5. Enfin, les points 3 et 6 découlent du fait que les atomes de η contiennent des morceaux de variétés instables (*cf.* lemme 4.2-(3)). Notons que la convergence du produit infini Δ est assurée par la stricte positivité des exposants de μ.

Voyons maintenant comment la proposition 1.3 entraîne le théorème 1.1. Considérons $(\nu_{\hat{x}})_{\hat{x}\in\widehat{X}}$ une famille de probabilités conditionnelles pour la partition η (*cf.* théorème 6.1) et $q_{\hat{x}}$ la mesure de probabilité sur $\widehat{X}$ "à densité" définie par :

$$\forall B \in \mathcal{M}\ ,\ q_{\hat{x}}(B) := \frac{1}{L(\hat{x})} \int_{\pi_0(B\cap\eta_{\hat{x}})} \Delta(\hat{x}, \sigma_{\hat{x}}(y))\, dm(y).$$

Il s'agit dans un premier temps d'identifier les mesures $\nu_{\hat{x}}$ et $q_{\hat{x}}$ pour ν-presque tout $\hat{x}$. Par définition de l'entropie conditionnelle (*cf.* section 6.3), le point 4 de la proposition 1.3 s'écrit :

$$h_\nu(g^n) = H(g^{-n}\eta \mid \eta) = -\int_{\widehat{X}} \log \nu_{\hat{x}} \left[\left(g^{-n}\eta\right)_{\hat{x}} \right]\, d\nu(\hat{x}).$$

Par ailleurs, le caractère décroissant de η et la formule de changement de variable entraînent (*cf.* lemme 5.3) :

$$\int_{\widehat{X}} \log \mathrm{Jac}\, f^n(x_0)\, d\nu(\hat{x}) = -\int_{\widehat{X}} \log q_{\hat{x}} \left[\left(g^{-n}\eta\right)_{\hat{x}} \right] \, d\nu(\hat{x}).$$

On identifie les quantités précédentes à l'aide de la formule de Pesin (notre hypothèse), écrite sous la forme :

$$h_\nu(g^n) = \int_{\widehat{X}} \log \mathrm{Jac}\, f^n(x_0)\, d\nu(\hat{x}).$$

On montre ainsi que les *moyennes* des fonctions $\hat{x} \mapsto \log \nu_{\hat{x}} \left[(g^{-n}\eta)_{\hat{x}} \right]$ et $\hat{x} \mapsto \log q_{\hat{x}} \left[(g^{-n}\eta)_{\hat{x}} \right]$ coïncident. L'égalité *ponctuelle* découle de l'inégalité de convexité de Jensen (*cf.* lemme 5.5). On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour ν-presque tout $\hat{x}$:

$$q_{\hat{x}} \left[\left(g^{-n}\eta\right)_{\hat{x}} \right] = \nu_{\hat{x}} \left[\left(g^{-n}\eta\right)_{\hat{x}} \right].$$

Puisque la σ-algèbre engendrée par la famille $(\mathcal{M}(g^{-n}\eta))_{n\geq 0}$ coïncide avec la tribu borélienne $\mathcal{M}$ de $\widehat{X}$ (*cf.* point 5), la ligne précédente entraîne $q_{\hat{x}} = \nu_{\hat{x}}$ pour ν-presque tout $\hat{x}$. On a donc $\nu = \int_{\widehat{X}} q_{\hat{x}}\, d\nu(\hat{x})$. On exhibe ainsi une densité pour la mesure $\mu = \pi_{0*}(\nu)$ en terme de la fonction Δ (*cf.* lemme 5.7), celle-ci est donc absolument continue par rapport à m.

2 Généralités

2.1 Le cadre de travail

Soit (X, ω) une variété compacte kählérienne de dimension k. On note d (ou dist) la distance, Ω la forme volume ω^k et m la mesure volume induite par Ω. Pour tout $x \in X$ et $r > 0$, on désigne par $B_x(r)$ (resp. $\overline{B_x}(r)$) la boule ouverte (resp. fermée) centrée en x et de rayon r. Le diamètre et la frontière d'une partie A sont notés respectivement $\mathrm{diam}\,(A)$ et ∂A, la distance entre deux parties A et B est notée $\mathrm{dist}\,(A, B)$. On désigne par $\mathrm{Lip}\,(h)$ la constante de Lipschitz d'une application $h : U \to X$ définie sur un ouvert U de X.

On se fixe $f : X \to X$ une application méromorphe. Soient $\mathcal{C}$ son ensemble critique et $\mathcal{I}$ son ensemble d'indétermination. Le jacobien de f est défini comme la fonction $\mathrm{Jac}\, f$ vérifiant la relation $f^*\Omega = \mathrm{Jac}\, f.\Omega$, où $f^*\Omega$ est l'extension triviale de $(f_{|X\setminus\mathcal{I}})^*\Omega$ à travers $\mathcal{I}$. Cette fonction est positive et de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de $\mathcal{I}$. On note $D_x\mathrm{Jac}\, f$ sa différentielle au point x. On suppose que f est dominante, *i.e.* que la restriction de $\mathrm{Jac}\, f$ aux ouverts de X n'est pas identiquement nulle.

Soit $\mathcal{V} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par :

$$\mathcal{V}(t) := \sup \{|D_x \mathrm{Jac}\, f|\, ,\, x \in X\, ,\, \mathrm{dist}\,(x, \mathcal{I}) \geq t\}\, .$$

Puisque f est méromorphe, il existe des constantes $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ et $\delta \in \mathbb{N}^*$ telles que :

$$\mathcal{V}(t) \leq \tau t^{-\delta} \tag{1}$$

(*cf.* [DD], lemme 2.2). Cette inégalité est importante pour la convergence du produit infini Δ (*cf.* lemme 3.3).

Dans toute la suite, μ est une mesure f-invariante, ergodique et vérifie les propriétés suivantes :

1. Les fonctions *quasi-plurisousharmoniques (qpsh)* sont μ-intégrables.
2. Les exposants de μ sont strictement positifs.

Rappelons qu'une fonction $u : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est *qpsh* si elle est m-intégrable, semi-continue supérieurement et vérifie $i\partial\bar{\partial}u \geq -c\omega$, où $c \geq 0$. Autrement dit, u est localement la somme d'une fonction *psh* et d'une fonction lisse. La condition 1 entraîne que pour tout ensemble analytique $\mathcal{J}$ de X, la fonction $\log \mathrm{dist}\,(., \mathcal{J})$ est μ-intégrable. En effet, puisque X est une variété kählerienne, cette fonction est minorée par une fonction *qpsh* sur X (*cf.* [DS2], App. A.1). En particulier, $\mu(\mathcal{J}) = 0$ et les fonctions $\log \left\| (D_x f)^{\pm 1} \right\|$, $\log \mathrm{Jac}\, f(x)$ sont μ-intégrables. Cela se vérifie en majorant leurs valeurs absolues par une fonction du type $c_1 - c_2 \log \mathrm{dist}\,(x, \mathcal{F})$, où c_1 et c_2 sont des constantes positives et $\mathcal{F}$ est un ensemble analytique construit à l'aide de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{C}$ (*cf.* [DD], § 2.1).

Les exposants de μ sont en particulier bien définis (*cf.* [Ar], Chap. 3), nous les noterons en ordre croissant $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_k$. Puisque les exposants du système (X, f^n, μ) sont $(n\lambda_1, \ldots, n\lambda_k)$, on dispose des égalités suivantes (*cf.* [Ru2]), importantes dans notre démonstration (*cf.* lemme 5.1) :

$$2n(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k) = \int_X \log \mathrm{Jac}\, f^n \, d\mu. \tag{2}$$

Signalons que la condition 2 est cruciale pour construire les variétés instables locales de f (*cf.* section 3.1). Dans toute la suite, on fixe $\epsilon > 0$ très petit devant le plus petit exposant λ_1.

2.2 Exemples

Soient (X, ω) une variété compacte complexe kählérienne de dimension k et $f : X \to X$ une application méromorphe dominante. On note d_t le degré topologique de f et χ son $(k-1)$-ième degré dynamique défini par (*cf.* [RS], [DS3]) :

$$\chi = \lim_{n \to \infty} \left(\int_X f^{n*} \omega^{k-1} \wedge \omega \right)^{1/n}.$$

Lorsque $d_t > \chi$, Guedj [G] et Dinh-Sibony [DS2] ont montré que la suite de mesures

$$\mu_n := \frac{1}{d_t^n} f^{n*}\omega^k$$

converge vers une mesure de probabilité invariante et ergodique μ, d'entropie $\log d_t$ (*cf.* [RS] pour le cas de l'espace projectif $\mathbb{P}^k$). Cette mesure intègre les fonctions *qpsh* et ses exposants sont strictement positifs : les conditions 1 et 2 ci-dessus sont donc satisfaites. Plus précisément, ses exposants sont minorés par $\log \sqrt{d_t/\chi}$. Ainsi, sous l'hypothèse de minimalité des exposants, la formule de Pesin est vérifiée si et seulement si $d_t^{k-1} = \chi^k$.

Lorsque $X = \mathbb{P}^k$ et f est un endomorphisme holomorphe de degré $d \geq 2$, on a $d_t = d^k$ et $\chi = d^{k-1}$. Dans ce cas, la minimalité des exposants entraîne automatiquement la formule de Pesin.

2.3 Extension naturelle

Soit $\widehat{X}$ l'espace des orbites défini par :

$$\widehat{X} = \left\{ \hat{x} := (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \, , \, f(x_n) = x_{n+1} \right\} \subset X^{\mathbb{Z}}.$$

On munit cet ensemble de la topologie produit et de la tribu borélienne $\mathcal{B}$. La projection $\hat{x} \mapsto x_0$ est notée π_0 et g est le décalage à gauche sur $\widehat{X}$, de sorte que $f \circ \pi_0 = \pi_0 \circ g$. On désigne par ν l'unique mesure de probabilité sur $\widehat{X}$ invariante par g vérifiant $\nu(\pi_0^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour tout borélien A de X. Elle est ergodique, car μ est ergodique. Notons que l'existence de cette mesure résulte du théorème de prolongement de Kolmogorov (*cf.* [CFS], Chap.10, §4).

On dit qu'une partie de X est *ν-négligeable* si elle est incluse dans un borélien de ν-mesure nulle. Soit $\mathcal{M}$ la σ-algèbre obtenue en complétant la tribu $\mathcal{B}$ relativement à la mesure ν. Autrement dit $\mathcal{M}$ est engendrée par les boréliens et les ensembles ν-négligeables. Cette complétion s'avère nécessaire pour que la classe des partitions mesurables soit stable par l'opération de *produit* $\vee$ (*cf.* section 6.1).

Soit $\widehat{Y}$ le sous-ensemble g-invariant :

$$\widehat{Y} = \left\{ \hat{x} \in \widehat{X} \, , \, x_n \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{I} \, , \, \forall n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ce borélien est de ν-mesure totale car μ ne charge pas les ensembles analytiques. Autrement dit, une orbite ν-générique évite $\mathcal{C}$ et $\mathcal{I}$. Pour ne pas alourdir les énoncés, nous identifierons $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$.

Nous terminons cette section par deux lemmes élémentaires.

Lemme 2.1 *Il existe deux fonctions mesurables $\alpha, \beta : \widehat{X} \to]0,1]$ telles que pour ν-presque tout $\hat{x}$ et pour tout $n \geq 0$:*

$$\mathrm{Jac}\, f(x_{-n}) \geq \alpha(\hat{x}) e^{-n\epsilon} \quad \textit{et} \quad \mathrm{dist}\,(x_{-n}, \mathcal{I}) \geq 2\beta(\hat{x}) e^{-n\epsilon}.$$

La preuve, laissée au lecteur, repose sur le théorème ergodique de Birkhoff appliqué respectivement aux fonctions intégrables $\hat{x} \mapsto \log \mathrm{Jac}\, f(x_0)$ et $\hat{x} \mapsto \log \mathrm{dist}\,(x_0, \mathcal{I})$ (*cf.* [DD], lemme 2.2).

Lemme 2.2 *Soient $c \in X$ et $[a,b]$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}_+^*$. Il existe $s \in [a,b]$ et une fonction mesurable $\gamma : \widehat{X} \to]0,1]$ tels que :*

$$\forall \hat{x}\ \nu\text{-}p.p.\ ,\quad \forall n \geq 0\ ,\ |\mathrm{dist}\,(c, x_{-n}) - s| \geq \gamma(\hat{x}) e^{-n\epsilon}. \tag{3}$$

Autrement dit, les orbites ν-génériques négatives s'approchent lentement de la frontière de la boule $B_c(s)$.

DÉMONSTRATION : D'après la proposition 3.2 de [LS], l'ensemble des réels $s \in [a,b]$ qui vérifient :

$$\sum_{n \geq 0} \mu\left\{y \in X\ ,\ |\mathrm{dist}\,(c,y) - s| < e^{-n\epsilon}\right\} < +\infty \tag{4}$$

est de mesure de Lebesgue $(b-a)$. Fixons un tel réel s. L'*invariance* de ν entraîne :

$$\sum_{n \geq 0} \nu\left\{\hat{y} \in \widehat{X}\ ,\ |\mathrm{dist}\,(c, y_{-n}) - s| < e^{-n\epsilon}\right\} < +\infty.$$

Le lemme de Borel-Cantelli implique alors :

$$\forall \hat{x}\ \nu\text{-p.p.}\ ,\quad \exists n_0(\hat{x}) \in \mathbb{N}\ , \forall n \geq n_0(\hat{x})\ ,\ |\mathrm{dist}\,(c, x_{-n}) - s| \geq e^{-n\epsilon}.$$

Il existe donc une fonction mesurable $\gamma : \widehat{X} \to]0,1]$ vérifiant (3). Notons qu'elle est presque partout strictement positive, car la frontière de $B_c(s)$ est de μ-mesure nulle (*cf.* ligne (4)). □

2.4 La partition $\mathcal{P}$ de X

Elle interviendra dans la construction de la partition η. Rappelons que ϵ est petit devant le plus petit exposant λ_1.

Proposition 2.3 *Il existe une partition finie $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_j)_{j \in \{1,\dots,N\}}$ de X en ensembles ouverts telle que :*

1. *L'application f est injective en restriction à chaque atome $\mathcal{P}_j$.*

2. *Il existe une fonction mesurable $\delta : \widehat{X} \to]0,1]$ vérifiant :*

$$\forall \hat{x}\ \nu\text{-}p.p.\ , \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ d(x_{-n}, \partial\mathcal{P}) \geq \delta(\hat{x}) e^{-n\epsilon}$$

où $\partial\mathcal{P}$ désigne la réunion des bords des ouverts $(\mathcal{P}_j)_{j\in\{1,\cdots,N\}}$. Autrement dit, les orbites ν-génériques négatives s'approchent lentement de la frontière des atomes de $\mathcal{P}$.

On consultera l'article de Buzzi [B], §3 pour une démonstration (*cf.* [L2] en dimension 1). L'idée est de découper X à l'aide d'hypersurfaces réelles s'appuyant sur l'ensemble critique $\mathcal{C}$ et sur l'ensemble d'indétermination $\mathcal{I}$. On perturbe ensuite ce découpage pour réaliser le point 2 (on peut utiliser à cet effet la proposition 3.2 de [LS] comme dans le lemme 2.2).

Dorénavant, $\mathcal{P}$ est une partition de X vérifiant ces propriétés. On note $\mathcal{P}(z)$ l'atome de $\mathcal{P}$ contenant le point $z \in X$ et on appelle $\mathcal{P}$-adresse de $\hat{x}$ la suite $\pi_{\mathcal{P}}(\hat{x})$ définie par :

$$\pi_{\mathcal{P}} : \begin{array}{ccc} \widehat{X} & \longrightarrow & \{1,\ldots,N\}^{\mathbb{N}} \\ \hat{x} & \longmapsto & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \quad \text{tel que } \mathcal{P}_{a_n} = \mathcal{P}(x_{-n}).$$

Notons que la $\mathcal{P}$-adresse de $\hat{x}$ ne concerne que “le passé” de $\hat{x}$.

3 Variétés instables locales

Nous les construisons à l'aide des branches inverses des itérées de f. En particulier, nous n'utilisons pas la théorie de Pesin.

3.1 Branches inverses

Pour tout $\hat{x} \in \widehat{X}$, on note (lorsqu'elle existe) $f_{\hat{x}}^{-n}$ la branche inverse de f^n définie au voisinage de x_0 vérifiant $f_{\hat{x}}^{-n}(x_0) = x_{-n}$. La proposition suivante stipule que pour ν-presque tout $\hat{x}$, les branches inverses le long de $\hat{x}$ sont définies sur des boules ouvertes non triviales. La stricte positivité des exposants de μ est ici cruciale.

Proposition 3.1 *Il existe des fonctions mesurables $r : \widehat{X} \to]0,1]$ et $C : \widehat{X} \to [1,+\infty[$ telles que pour ν-presque tout $\hat{x}$ et pour tout $n \geq 0$:*

1. *$f_{\hat{x}}^{-n}$ est définie sur $\overline{B}_{x_0}(r(\hat{x}))$.*
2. Lip $\left(f_{\hat{x}}^{-n}\right) \leq C(\hat{x}) e^{-n(\lambda_1-\epsilon)}$ *sur $\overline{B}_{x_0}(r(\hat{x}))$.*
3. dist $\left(f_{\hat{x}}^{-n}\left[\ \overline{B}_{x_0}(r(\hat{x}))\right]\ , \mathcal{I}\right) \geq \beta(\hat{x}) e^{-n\epsilon}$.
4. *$f_{\hat{x}}^{-n}\left[B_{x_0}(r(\hat{x}))\right] \subset \mathcal{P}(x_{-n})$.*

Les points 1 et 2 ont été démontrés par Briend et Duval [BD1] dans le cadre holomorphe, le cas méromorphe est traité dans l'article [DD]. Nous ne reproduisons pas la preuve. Les points 3 et 4 s'obtiennent en utilisant la décroissance exponentielle des branches inverses et l'approche lente des orbites négatives vers $\mathcal{I}$ et vers les frontières des atomes de $\mathcal{P}$ (*cf.* lemme 2.1 et prop. 2.3-(3)).

Nous posons pour tout $\hat{x} \in \widehat{X}$:

$$\mathcal{W}(\hat{x}, r(\hat{x})) := \left\{ \hat{z} \in \widehat{X} \,/\, \exists t \in B_{x_0}(r(\hat{x})) \,,\, \forall n \geq 0 \,,\, z_{-n} = f_{\hat{x}}^{-n}(t) \right\} \subset \widehat{X}.$$

Ce borélien s'identifie à une variété instable locale. On définit de même $\overline{\mathcal{W}}(\hat{x}, r(\hat{x}))$ en remplaçant la boule ouverte par la boule fermée. Nous utiliserons souvent l'observation suivante, qui découle de la proposition 3.1-(4) :

Remarque 3.2 *Les éléments de $\mathcal{W}(\hat{x}, r(\hat{x}))$ ont la même $\mathcal{P}$-adresse que $\hat{x}$.*

Il est clair qu'un point $\hat{z}$ de $\overline{\mathcal{W}}(\hat{x}, r(\hat{x}))$ est entièrement déterminé par sa condition initiale z_0. Ainsi, l'inverse de la restriction de π_0 à $\overline{\mathcal{W}}(\hat{x}, r(\hat{x}))$, noté $s_{\hat{x}}$, est bien défini. Le lemme suivant stipule que la fonction Δ introduite dans la proposition 1.3 existe bien sur les variétés instables locales.

Lemme 3.3 *Pour ν-presque tout $\hat{x}$, la fonction*

$$\Delta\left(\hat{x}, s_{\hat{x}}(.)\right) : \quad \begin{array}{ccc} B_{x_0}(r(\hat{x})) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ y & \longmapsto & \prod_{p \geq 1} \frac{\mathrm{Jac}\, f(x_{-p})}{\mathrm{Jac}\, f([s_{\hat{x}}(y)]_{-p})} \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement positive et bornée.

Démonstration : La preuve consiste à vérifier que la série de terme général :

$$v_p(y) := \frac{\mathrm{Jac}\, f\left([s_{\hat{x}}(y)]_{-p}\right)}{\mathrm{Jac}\, f\left(x_{-p}\right)} - 1$$

converge uniformément sur $\overline{B}_{x_0}(r(\hat{x}))$. Notons $\hat{y} := s_{\hat{x}}(y)$. D'après l'inégalité des accroissements finis, l'inégalité (1) et la proposition 3.1-(2),(3), on a :

$$|\mathrm{Jac}\, f(y_{-p}) - \mathrm{Jac}\, f(x_{-p})| \leq \mathcal{V}(\beta(\hat{x})e^{-p\epsilon})d(y_{-p}, x_{-p}) \leq \tau.(Cr\beta^{-\delta})(\hat{x})e^{-p(\lambda_1 - (1+\delta)\epsilon)}.$$

Le lemme 2.1 entraîne alors :

$$\forall y \in \overline{B}_{x_0}(r(\hat{x})) \;,\; |v_p(y)| \leq \tau.(Cr\beta^{-\delta}/\alpha)(\hat{x})e^{-p(\lambda_1 - (2+\delta)\epsilon)}.$$

On a ainsi majoré la fonction v_p par le terme général d'une série convergente. La stricte positivité de Δ provient de l'injectivité des applications $(f_{\hat{x}}^{-n})_{n \geq 0}$ sur $\overline{B}_{x_0}(r(\hat{x}))$. $\square$

3.2 Définition du borélien $\mathcal{A}$ de $\widehat{X}$

Il intervient dans la définition de la partition η. Ce borélien est défini comme une réunion de variétés instables $\mathcal{W}(\hat{z}, r(\hat{z}))$ dont le rayon r et la constante de Lipschitz C (*cf.* lemme 3.1) sont uniformément bornés et dont les conditions initiales z_0 sont localisées. Fixons ρ assez grand et $c \in X$ de sorte que le borélien :

$$\widehat{V} := \{C \leq \rho\} \cap \{r \geq 1/\rho\} \cap \pi_0^{-1}\left[B_c(1/4\rho)\right]$$

soit de ν-mesure strictement positive. Fixons également $s \in [1/4\rho, 1/2\rho]$ vérifiant la conclusion du lemme 2.2, ce choix s'avérera utile dans la preuve du lemme 4.2. On définit le borélien $\mathcal{A}$ de $\widehat{X}$ par

$$\mathcal{A} := \bigcup_{\hat{z} \in \widehat{V}} \mathcal{W}(\hat{z}, r(\hat{z})) \cap \pi_0^{-1}\left[B_c(s)\right].$$

Sa ν-mesure est strictement positive (il contient $\widehat{V}$) et pour tout $\hat{z} \in \widehat{V}$, les applications $(f_{\hat{z}}^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies sur $B_c(s)$ (on a $s \leq 1/2\rho$ et $r \geq 1/\rho$).

Le lemme élémentaire suivant permet de localiser les points de $\widehat{X}$ dans une des variétés instables locales qui définissent $\mathcal{A}$ (la $\mathcal{P}$-adresse de $\hat{x}$ est définie à la section 2.4).

Lemme 3.4 *Soient $\hat{z} \in \widehat{V}$ et $\hat{w} \in \mathcal{W}(\hat{z}, r(\hat{z}))$. Si $\hat{y} \in \widehat{X}$ vérifie :*
- *$\hat{y}$ et $\hat{w}$ ont la même $\mathcal{P}$-adresse.*
- *$\mathrm{dist}\,(y_0, c) < s$ (en particulier si $\hat{y} \in \mathcal{A}$)*

alors $\hat{y} \in \mathcal{W}(\hat{z}, r(\hat{z}))$.

La démonstration découle immédiatement de l'injectivité de f en restriction aux atomes de $\mathcal{P}$ (*cf.* prop. 2.3-(1)).

4 La partition η

4.1 Une partition intermédiaire ξ

Soient $\mathcal{P}$ la partition de X introduite à la section 2.4 et $\mathcal{A}$ le borélien de $\widehat{X}$ défini à la section 3.2. On définit la partition ξ de $\widehat{X}$ par :

$$\xi = \pi_0^{-1}(\mathcal{P}) \bigvee \{\mathcal{A}, \mathcal{A}^c\}. \tag{5}$$

Nous poserons par la suite $\eta := \bigvee_{p \geq 0} g^p \xi$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit ξ_n la partition $g^{-1}\xi \vee \cdots \vee g^{-n}\xi$. Les partitions ξ et ξ_n de $\widehat{X}$ sont d'entropie finie (elles possèdent un nombre fini d'atomes) et sont mesurables. De plus, elles vérifient la propriété suivante :

Proposition 4.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partition mesurable ξ_n est génératrice pour l'automorphisme g^{-n}.*

DÉMONSTRATION : Nous traitons le cas $n = 1$, on procède de même pour un entier n quelconque. Puisque $\nu(\mathcal{A}) > 0$, le théorème ergodique de Birkhoff entraîne :

$$\forall \hat{x} \ \nu\text{-p.p.} \ , \ \exists (p_j)_{j \in \mathbb{N}} \ , \ \forall j \in \mathbb{N} \ , \ g^{p_j}(\hat{x}) \in \mathcal{A}.$$

Par définition de $\mathcal{A}$, il existe pour tout $j \in \mathbb{N}$ un élément $\hat{a}_j \in \widehat{V}$ vérifiant :

$$g^{p_j}(\hat{x}) \in \mathcal{W}(\hat{a}_j, r(\hat{a}_j)). \tag{6}$$

Fixons $\hat{y} \in \left[\bigvee_{p \in \mathbb{Z}} g^p \xi\right](\hat{x})$ et montrons que $\hat{x} = \hat{y}$, *i.e.* que l'on a $y_{-q} = x_{-q}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$. Puisque $g^{p_j}(\hat{x})$ et $g^{p_j}(\hat{y})$ sont dans le même atome de $\bigvee_{p \in \mathbb{Z}} g^p \xi$, alors $g^{p_j}(\hat{x})$ et $g^{p_j}(\hat{y})$ ont la même $\mathcal{P}$-adresse (car $\xi \geq \pi_0^{-1}\mathcal{P}$) et cette adresse est celle de $\hat{a}_j$ (d'après (6) et la remarque 3.2). De plus, $g^{p_j}(\hat{y}) \in \mathcal{A}$ car $g^{p_j}(\hat{x}) \in \mathcal{A}$ et $\bigvee_{p \in \mathbb{Z}} g^p \xi \geq \{\mathcal{A}, \mathcal{A}^c\}$. Le lemme 3.4 appliqué à $\hat{a}_j \in \widehat{V}$, $g^{p_j}(\hat{x}) \in \mathcal{A}$ et $g^{p_j}(\hat{y}) \in \mathcal{A}$ montre que $g^{p_j}(\hat{y}) \in \mathcal{W}(\hat{a}_j, r(\hat{a}_j))$. On a donc par définition des variétés instables :

$$\begin{aligned} \forall q \in \mathbb{N} \ , \ \forall j \geq 0 \ , \ d(y_{-q}, x_{-q}) &\leq d(y_{-q}, (a_j)_{-p_j - q}) + d((a_j)_{-p_j - q}, x_{-q}) \\ &\leq 2C(\hat{a}_j) e^{-(p_j + q)(\lambda_1 - \epsilon)} \\ &\leq 2\rho e^{-(p_j + q)(\lambda_1 - \epsilon)} \end{aligned}$$

car $\hat{a}_j \in \widehat{V} \subset \{C \leq \rho\}$. On obtient alors $y_{-q} = x_{-q}$ lorsque j tend vers l'infini. □

4.2 Définition de η et premières propriétés

Soit η la partition décroissante de $\widehat{X}$ définie par :

$$\eta := \bigvee_{p \geq 0} g^p \xi.$$

C'est une partition mesurable car ξ est elle-même mesurable (*cf.* section 6.2). Les propriétés suivantes seront utiles pour établir la proposition 1.3. Rappelons que $B_c(s)$, $\widehat{V}$ et $\mathcal{A}$ sont définis à la section 3.2.

Lemme 4.2

1. *Les éléments de $\eta_{\hat{x}}$ ont la même $\mathcal{P}$-adresse que $\hat{x}$.*
2. *Soient $\hat{x} \in \mathcal{A}$ et $\hat{z} \in \widehat{V}$ tels que $\hat{x} \in \mathcal{W}(\hat{z}, r(\hat{z}))$. Alors $\eta_{\hat{x}} \subset \mathcal{W}(\hat{z}, r(\hat{z}))$.*
3. *Il existe une fonction mesurable $r' : \widehat{X} \to]0, 1]$ telle que pour ν-presque tout $\hat{x}$,*
   a) $0 < r'(\hat{x}) \leq r(\hat{x}) \leq 1$,
   b) $\forall n \geq 0 \ , \ f_{\hat{x}}^{-n}(B_{x_0}(r'(\hat{x}))) \subset B_c(s)$ ou $B_c(s)^c$,
   c) $\mathcal{W}(\hat{x}, r'(\hat{x})) \subset \eta_{\hat{x}}$.

Démonstration : Le point 1 est clair, car $\vee_{k\geq 0} g^k \xi \geq \vee_{k\geq 0} g^k(\pi_0^{-1}\mathcal{P})$. Le point 2 provient du lemme 3.4 appliqué aux éléments $\hat{y}$ de $\eta_{\hat{x}}$: $\hat{x}$ et $\hat{y}$ ont même $\mathcal{P}$-adresse (point 1) et $\hat{y} \in \mathcal{A}$ (car $\hat{x} \in \mathcal{A}$ et $\eta \geq \{\mathcal{A}, \mathcal{A}^c\}$).

Démontrons le point 3. C'est ici qu'intervient le choix du réel s effectué à la section 3.2 : il nous assure que le diamètre de $f_{\hat{x}}^{-n}\left(B_{x_0}(r(\hat{x}))\right)$ décroît beaucoup plus vite que la distance entre x_{-n} et le bord de la boule $B_c(s)$. Posons $r' := \min\{r, \gamma/2C\}$, où les fonctions r, C sont définies à la proposition 3.1 et γ au lemme 2.2. Pour tout $z_0 \in B_{x_0}(r'(\hat{x}))$ et pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} d(x_{-n}, f_{\hat{x}}^{-n}(z_0)) &\leq C(\hat{x}) e^{-n\lambda_1 + n\epsilon} \frac{\gamma(\hat{x})}{2C(\hat{x})} \\ &\leq \frac{1}{2} e^{-n\lambda_1 + 2n\epsilon} |d(c, x_{-n}) - s| \\ &\leq \frac{1}{2} |d(c, x_{-n}) - s|. \end{aligned}$$

On en déduit que si $d(c, x_{-n}) > s$ (resp. $<$) alors $f_{\hat{x}}^{-n}\left(B_{x_0}(r'(\hat{x}))\right) \subset B_c(s)^c$ (resp. $B_c(s)$). La fonction r' réalise donc a) et b).

Vérifions que b) entraîne c), c'est à dire que $g^{-n}\mathcal{W}(\hat{x}, r'(\hat{x}))$ est contenu dans un atome de $\xi = \{\mathcal{A}, \mathcal{A}^c\} \vee \pi_0^{-1}(\mathcal{P})$ pour tout $n \geq 0$. Puisque $r' \leq r$, les éléments de $g^{-n}\mathcal{W}(\hat{x}, r'(\hat{x}))$ ont la même $\mathcal{P}$-adresse (*cf.* remarque 3.2) et donc $g^{-n}\mathcal{W}(\hat{x}, r'(\hat{x}))$ est contenu dans un atome de $\pi_0^{-1}(\mathcal{P})$. Venons-en à la partition $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}^c\}$. D'après b), deux cas se présentent. Si $f_{\hat{x}}^{-n}\left(B_{x_0}(r'(\hat{x}))\right) \subset B_c(s)^c$, alors $g^{-n}\mathcal{W}(\hat{x}, r'(\hat{x})) \subset \mathcal{A}^c$ par définition de $\mathcal{A}$. Si

$$f_{\hat{x}}^{-n}\left(B_{x_0}(r'(\hat{x}))\right) \subset B_c(s) \tag{7}$$

alors on dispose des implications :

$$g^{-n}(\hat{x}) \in \mathcal{A} \Rightarrow g^{-n}\mathcal{W}(\hat{x}, r'(\hat{x})) \subset \mathcal{A} \quad \text{et} \quad g^{-n}(\hat{x}) \notin \mathcal{A} \Rightarrow g^{-n}\mathcal{W}(\hat{x}, r'(\hat{x})) \subset \mathcal{A}^c.$$

Commençons par vérifier la première implication. Pour tout $\hat{y} \in \mathcal{W}(\hat{x}, r'(\hat{x}))$, $g^{-n}(\hat{x})$ et $g^{-n}(\hat{y})$ ont la même $\mathcal{P}$-adresse (*cf.* remarque 3.2) et la ligne (7) entraîne $f_{\hat{x}}^{-n}(y_0) \in B_c(s)$. Le lemme 3.4 fournit alors $g^{-n}(\hat{y}) \in \mathcal{A}$.

Passons à la deuxième implication. Supposons par l'absurde que $g^{-n}(\hat{x}) \notin \mathcal{A}$ et qu'il existe $\hat{y} \in \mathcal{W}(\hat{x}, r'(\hat{x}))$ tel que $g^{-n}(\hat{y}) \in \mathcal{A}$. Il existe alors $\hat{z} \in \widehat{V}$ tel que $g^{-n}(\hat{y}) \in \mathcal{W}(\hat{z}, r(\hat{z}))$. Puisque $g^{-n}(\hat{x})$ et $g^{-n}(\hat{y})$ ont même $\mathcal{P}$-adresse et $f_{\hat{x}}^{-n}(x_0) \in B_c(s)$ (par la ligne (7)), on a $g^{-n}(\hat{x}) \in \mathcal{W}(\hat{z}, r(\hat{z})) \subset \mathcal{A}$. Contradiction. □

4.3 Démonstration de la proposition 1.3

1 - π_0 est injective sur $\eta_{\hat{x}}$. Soient $\hat{y}, \hat{z} \in \eta_{\hat{x}}$ tel que $y_0 = z_0$. Il s'agit de vérifier que $y_{-p} = z_{-p}$ pour tout $p \geq 1$. Pour $p = 1$, on remarque que y_{-1}, z_{-1} sont dans un même atome de $\mathcal{P}$ (*cf.* lemme 4.2-(1)) sur lequel f est injective (*cf.* proposition 2.3-(1)). On procède par induction pour $p \geq 2$.

2 - f^n est injective sur $\pi_0(g^{-n}\eta_{\hat{x}})$. Pour $n=1$, on observe que $g^{-1}\eta$ est plus fine que $\pi_0^{-1}\mathcal{P}$ et que f est injective sur les atomes de $\mathcal{P}$. On traite encore le cas général par induction.

3 - $\eta_{\hat{x}}$ est constitué d'un nombre dénombrable d'atomes de $g^{-n}\eta$. Puisque la partition η est décroissante, chacun de ses atomes est réunion d'atomes de $g^{-n}\eta$. Le point 1 montre que $\hat{z} \in \eta_{\hat{x}}$ est entièrement déterminé par sa condition initiale z_0. Il suffit donc de montrer que $\pi_0(\eta_{\hat{x}})$ est recouvert par une famille dénombrable d'ensembles du type $\pi_0([g^{-n}\eta]_{\hat{z}})$. C'est bien le cas puisque ceux-ci contiennent des ouverts de X. En effet, le lemme 4.2-(3) entraîne :

$$\forall \hat{z}\ \nu\text{-p.p.}\ ,\ [g^{-n}\eta]_{\hat{z}} = g^{-n}\left(\eta_{g^n(\hat{z})}\right) \supset g^{-n}\left[\mathcal{W}\left(g^n(\hat{z}), r'(g^n(\hat{z}))\right)\right]$$

où r' est une fonction strictement positive ν-presque partout.

4 - $h_\nu(g^n) = H(g^{-n}\eta \mid \eta)$. Rappelons que $h_\nu(g^n) = h_\nu(g^{-n})$ (*cf.* section 6.3). D'après la proposition 4.1, la partition $\xi_n = g^{-1}\xi \vee \cdots \vee g^{-n}\xi$ est un générateur d'entropie finie pour g^{-n}. Le théorème 6.2 entraîne alors :

$$\begin{aligned} h_\nu(g^{-n}) &= h_\nu(g^{-n}, \xi_n) = H\left(\xi_n \middle| \bigvee_{p\geq 1} g^{np}(\xi_n)\right) \\ &= H\left(g^{-1}\xi \vee \cdots \vee g^{-n}\xi \middle| \bigvee_{p\geq 0} g^p\xi\right) \\ &= H\left(g^{-1}\xi \vee \cdots \vee g^{-n}\xi \vee \left(\bigvee_{p\geq 0} g^p\xi\right) \middle| \bigvee_{p\geq 0} g^p\xi\right) \\ &= H(g^{-n}\eta \mid \eta). \end{aligned}$$

5 - La sous-algèbre $\bigvee_{n\geq 0}\mathcal{M}(g^{-n}\eta)$ coïncide avec $\mathcal{M}$. Il s'agit de vérifier que la partition $\bigvee_{n\geq 0} g^{-n}\eta$ est équivalente à la partition en points ϵ (*cf.* section 6.2), autrement dit, que les partitions $(g^{-n}\eta)_{n\geq 0}$ séparent les points d'un ensemble ν-générique. Le caractère décroissant de η entraîne :

$$\forall \hat{x}\ \nu\text{-p.p.}\ ,\ \forall p \geq 0\ ,\ \bigcap_{n=0}^{p} \left(g^{-n}\eta\right)_{\hat{x}} = \left(g^{-p}\eta\right)_{\hat{x}} = \left[\bigvee_{n\geq -p} g^n\xi\right](\hat{x}).$$

Lorsque l'on fait tendre p vers l'infini, on obtient :

$$\forall \hat{x}\ \nu\text{-p.p.}\ ,\ \bigcap_{n\geq 0} \left(g^{-n}\eta\right)_{\hat{x}} = \left[\bigvee_{n\in\mathbb{Z}} g^n\xi\right](\hat{x}) = \{\hat{x}\}\,.$$

car ξ est un générateur pour l'automorphisme g (*cf.* proposition 4.1).

6.1 - La fonction L est finie ν-presque partout. Observons que d'après les lemmes 3.3 et 4.2-(2), L est finie sur le borélien $\mathcal{A}$. Soit maintenant $\hat{x}$ un point ν-générique. D'après le théorème de Birkhoff, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $g^{-p}(\hat{x}) \in \mathcal{A}$. Comme $\eta_{\hat{x}} = g^p\left[(g^{-p}\eta)_{g^{-p}(\hat{x})}\right]$, on obtient ($\sigma_{\hat{x}}$ désigne l'inverse de la restriction de π_0 à $\eta_{\hat{x}}$, *cf.* point 1) :

$$\begin{aligned} L(\hat{x}) &= \int_{\pi_0(\eta_{\hat{x}})} \Delta(\hat{x}, \sigma_{\hat{x}}(y))\, dm(y) \\ &= \int_{\pi_0 \circ g^p\left[(g^{-p}\eta)_{g^{-p}(\hat{x})}\right]} \Delta(\hat{x}, \sigma_{\hat{x}}(y))\, dm(y) \\ &= \int_{f^p \circ \pi_0\left[(g^{-p}\eta)_{g^{-p}(\hat{x})}\right]} \Delta(\hat{x}, \sigma_{\hat{x}}(y))\, dm(y). \end{aligned}$$

L'application f^p est injective sur les projections (par π_0) des atomes de $g^{-p}\eta$ sur X (*cf.* point 2). La formule de changement de variable et la relation de commutation $f^p \circ \pi_0 = \pi_0 \circ g^p$ entraînent alors :

$$\begin{aligned} L(\hat{x}) &= \int_{\pi_0\left[(g^{-p}\eta)_{g^{-p}(\hat{x})}\right]} \Delta\left(\hat{x}, \sigma_{\hat{x}}(f^p(w))\right) \mathrm{Jac}\, f^p(w)\, dm(w) \\ &= \int_{\pi_0\left[(g^{-p}\eta)_{g^{-p}(\hat{x})}\right]} \Delta\left(\hat{x}, g^p \circ \sigma_{g^{-p}(\hat{x})}(w)\right) \mathrm{Jac}\, f^p(w)\, dm(w). \end{aligned}$$

En utilisant la définition de Δ et l'inclusion $(g^{-p}\eta)_{g^{-p}(\hat{x})} \subset \eta_{g^{-p}(\hat{x})}$, on obtient :

$$\begin{aligned} L(\hat{x}) &= \int_{\pi_0\left[(g^{-p}\eta)_{g^{-p}(\hat{x})}\right]} \Delta\left(g^{-p}(\hat{x}), \sigma_{g^{-p}(\hat{x})}(w)\right) \mathrm{Jac}\, f^p(x_{-p})\, dm(w) \\ &\leq \int_{\pi_0\left(\eta_{g^{-p}(\hat{x})}\right)} \Delta\left(g^{-p}(\hat{x}), \sigma_{g^{-p}(\hat{x})}(w)\right) \mathrm{Jac}\, f^p(x_{-p})\, dm(w) \\ &= \mathrm{Jac}\, f^p(x_{-p}) L(g^{-p}(\hat{x})). \end{aligned}$$

Cette quantité est finie, car $g^{-p}(\hat{x}) \in \mathcal{A}$.

6.2 - La fonction L est strictement positive ν-presque partout. Rappelons que $s_{\hat{x}}$ est l'inverse de la restriction de π_0 à $\mathcal{W}(\hat{x}, r(\hat{x}))$ (*cf.* section 3.1). D'après le lemme 4.2-(3), $s_{\hat{x}}$ et $\sigma_{\hat{x}}$ coïncident sur $\pi_0(\mathcal{W}(\hat{x}, r'(\hat{x}))$ avec l'inverse de π_0 en restriction à $\mathcal{W}(\hat{x}, r'(\hat{x}))$. Les lemmes 3.3 et 4.2-(3) fournissent alors :

$$L(\hat{x}) = \int_{\pi_0(\eta_{\hat{x}})} \Delta(\hat{x}, \sigma_{\hat{x}}(y))\, dm(y) \geq \int_{B_{x_0}(r'(\hat{x}))} \Delta(\hat{x}, s_{\hat{x}}(y))\, dm(y) > 0.$$

5 Démonstration du théorème 1.1.

Nous montrons que si la formule de Pesin

$$h_\mu(f) = 2\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \tag{8}$$

est satisfaite, alors μ est absolument continue par rapport à la mesure volume m sur X. Les arguments qui suivent sont classiques (*cf.* par exemple [L3]). Nous utilisons chacune des propriétés vérifiées par la partition η. On note $(\nu_{\hat{x}})_{\hat{x}\in\widehat{X}}$ une famille de probabilités conditionnelles de ν relativement à η et $q_{\hat{x}}$ la mesure de probabilité sur $\widehat{X}$ définie par :

$$\forall B \in \mathcal{M}\,,\; q_{\hat{x}}(B) := \frac{1}{L(\hat{x})} \int_{\pi_0(B\cap\eta_{\hat{x}})} \Delta(\hat{x}, \sigma_{\hat{x}}(y))\, dm(y)$$

où $\sigma_{\hat{x}}$ désigne l'inverse de π_0 en restriction à $\eta_{\hat{x}}$ (*cf.* prop. 1.3-(6)).

Lemme 5.1 *Si la formule de Pesin (8) est vérifiée, alors*

$$\forall n \geq 1\,,\; h_\nu(g^n) = \int_{\widehat{X}} \log \mathrm{Jac}\, f^n(x_0)\, d\nu(\hat{x}).$$

DÉMONSTRATION : Puisque l'on a $h_\nu(g^n) = h_\mu(f^n) = nh_\mu(f)$ (*cf.* section 6.3), la ligne (8) entraîne $h_\nu(g^n) = 2n\sum_{i=1}^k \lambda_i$. On dispose d'autre part de l'égalité (*cf.* la ligne (2), section 2.1) :

$$2n\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \int_X \log \mathrm{Jac}\, f^n(x)\, d\mu(x).$$

On termine en exprimant cette intégrale l'aide de la mesure $\nu = \pi_0^*(\mu)$. □

Dans les deux lemmes qui suivent, nous exprimons les membres de l'égalité du lemme 5.1 à l'aide des mesures $q_{\hat{x}}$ et $\nu_{\hat{x}}$.

Lemme 5.2 *Pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$h_\nu(g^n) = H(g^{-n}\eta \mid \eta) = -\int_{\widehat{X}} \log \nu_{\hat{x}} \left[\left(g^{-n}\eta\right)_{\hat{x}} \right] d\nu(\hat{x}).$$

DÉMONSTRATION : La première égalité provient de la proposition 1.3-(4) et la deuxième de la définition de l'entropie conditionnelle. □

Lemme 5.3 *Pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$\int_{\widehat{X}} \log \mathrm{Jac}\, f^n(x_0)\, d\nu(\hat{x}) = -\int_{\widehat{X}} \log q_{\hat{x}} \left[\left(g^{-n}\eta\right)_{\hat{x}} \right] d\nu(\hat{x}).$$

DÉMONSTRATION : Nous utilisons ici le caractère décroissant de η et la formule de changement de variable. Pour simplifier l'écriture, nous traitons le cas $n = 1$. Puisque l'on a $(g^{-1}\eta)_{\hat{x}} = g^{-1}\left(\eta_{g(\hat{x})}\right)$, la fonction Ψ définie par

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \pi_0\left[(g^{-1}\eta)_{\hat{x}}\right] & \longrightarrow & \pi_0\left[\eta_{g(\hat{x})}\right] \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est surjective. D'autre part, la partition η étant décroissante, on a l'inclusion $(g^{-1}\eta)_{\hat{x}} \subset \eta_{\hat{x}}$. L'application Ψ est donc injective d'après la proposition 1.3-(2). On en déduit pour ν-presque tout $\hat{x}$:

$$\begin{aligned} q_{\hat{x}}\left[(g^{-1}\eta)_{\hat{x}}\right].L(\hat{x}) &= \int_{\pi_0\left[(g^{-1}\eta)_{\hat{x}}\right]} \Delta(\hat{x}, \sigma_{\hat{x}}(t))\, dm(t) \\ &= \int_{\pi_0\circ g^{-1}\left[\eta_{g(\hat{x})}\right]} \Delta(\hat{x}, \sigma_{\hat{x}}(t))\, dm(t) \\ &= \int_{\Psi^{-1}\circ\pi_0\left[\eta_{g(\hat{x})}\right]} \Delta\left(\hat{x}, g^{-1}\circ\sigma_{g(\hat{x})}(\Psi(t))\right)\, dm(t). \end{aligned}$$

La formule de changement de variable entraîne alors :

$$\begin{aligned} q_{\hat{x}}\left[(g^{-1}\eta)_{\hat{x}}\right].L(\hat{x}) &= \int_{\pi_0\left[\eta_{g(\hat{x})}\right]} \Delta\left(\hat{x}, g^{-1}\circ\sigma_{g(\hat{x})}(u)\right) \operatorname{Jac}\Psi^{-1}(u)\, dm(u) \\ &= \int_{\pi_0\left[\eta_{g(\hat{x})}\right]} \Delta\left(\hat{x}, g^{-1}\circ\sigma_{g(\hat{x})}(u)\right) \left[\operatorname{Jac} f\left(\pi_0\circ g^{-1}\circ\sigma_{g(\hat{x})}(u)\right)\right]^{-1} dm(u) \\ &= \int_{\pi_0\left[\eta_{g(\hat{x})}\right]} \Delta\left(g(\hat{x}), \sigma_{g(\hat{x})}(u)\right) \left[\operatorname{Jac} f(x_0)\right]^{-1} dm(u) \\ &= L(g(\hat{x})).\left[\operatorname{Jac} f(x_0)\right]^{-1}. \end{aligned}$$

où le passage de la deuxième à la troisième ligne provient de la définition de Δ. On en déduit l'égalité :

$$\forall \hat{x}\ \nu\text{-p.p.}\ ,\ \log \operatorname{Jac} f(x_0) + \log\frac{L(\hat{x})}{L(g(\hat{x}))} = -\log q_{\hat{x}}\left[(g^{-1}\eta)_{\hat{x}}\right]. \tag{9}$$

On termine la preuve en intégrant (9) par rapport à ν et en utilisant son invariance. Comme la fonction $\log L$ n'est pas a priori ν-intégrable, nous faisons appel au résultat suivant (on note $\log^-(u) = \min(\log u, 0)$) :

Lemme 5.4 ([LS], Prop. 2.2) *Soit φ une fonction mesurable positive sur $\widehat{X}$. Si $\log^-\left(\varphi\circ g^{-1}/\varphi\right)$ est ν-intégrable, alors :*

$$\int_{\widehat{X}} \log\left(\frac{\varphi\circ g^{-1}}{\varphi}\right) d\nu = 0.$$

Vérifions que $\varphi = L\circ g$ satisfait les hypothèses de ce lemme. La fonction φ est positive et finie ν-presque partout d'après la proposition 1.3-(6). Pour la propriété d'intégrabilité, la ligne (9) fournit :

$$\forall \hat{x} \in \{L \leq L\circ g\}\ ,\ 0 \leq -\log\frac{L(\hat{x})}{L\circ g(\hat{x})} \leq \log\operatorname{Jac} f(x_0)$$

car $q_{\hat{x}}$ est une mesure de probabilité. Puisque la fonction $\hat{x} \mapsto \log\operatorname{Jac} f(x_0)$ est ν-intégrable (*cf.* section 2.1), on obtient :

$$\int_{\widehat{X}} \left|\log^-\left(\frac{L}{L\circ g}\right)\right| d\nu = \int_{\{L\leq L\circ g\}} -\log\left(\frac{L}{L\circ g}\right) d\nu < +\infty.$$

Cela termine la preuve du lemme 5.3. □

Nous montrons maintenant que les mesures $q_{\hat{x}}$ et $\nu_{\hat{x}}$ coïncident pour ν-presque tout $\hat{x}$. On établit tout d'abord qu'elles sont égales sur les éléments de la σ-algèbre $\mathcal{M}(g^{-n}\eta)$, ceci pour tout $n \geq 0$:

Lemme 5.5 *Pour ν-presque tout $\hat{x}$ et pour tout $n \geq 0$, on a :*

$$q_{\hat{x}}\left[\left(g^{-n}\eta\right)_{\hat{x}}\right] = \nu_{\hat{x}}\left[\left(g^{-n}\eta\right)_{\hat{x}}\right]. \tag{10}$$

Démonstration : Les lemmes 5.1, 5.2, 5.3 et l'inégalité de convexité de Jensen entraînent :

$$0 = \int_{\widehat{X}} \log \frac{q_{\hat{x}}\left[(g^{-n}\eta)_{\hat{x}}\right]}{\nu_{\hat{x}}\left[(g^{-n}\eta)_{\hat{x}}\right]}\, d\nu(\hat{x}) \leq \log \int_{\widehat{X}} \frac{q_{\hat{x}}\left[(g^{-n}\eta)_{\hat{x}}\right]}{\nu_{\hat{x}}\left[(g^{-n}\eta)_{\hat{x}}\right]}\, d\nu(\hat{x}). \tag{11}$$

Une égalité dans (11) entraîne (10) car la fonction logarithme est strictement concave. Vérifions donc que le membre de droite de (11) est nul. Comme les mesures $q_{\hat{x}}$ et $\mu_{\hat{x}}$ ne dépendent que de l'atome $\eta_{\hat{x}}$, on a par définition des probabilités conditionnelles :

$$\int_{\widehat{X}} \frac{q_{\hat{x}}\left[(g^{-n}\eta)_{\hat{x}}\right]}{\nu_{\hat{x}}\left[(g^{-n}\eta)_{\hat{x}}\right]}\, d\nu(\hat{x}) = \int_{\widehat{X}} \left[\int_{\eta_{\hat{x}}} \frac{q_{\hat{x}}\left[(g^{-n}\eta)_{\hat{t}}\right]}{\nu_{\hat{x}}\left[(g^{-n}\eta)_{\hat{t}}\right]}\, d\nu_{\hat{x}}(\hat{t})\ \right] d\nu(\hat{x}).$$

D'après la proposition 1.3-(3), l'atome $\eta_{\hat{x}}$ est une réunion *dénombrable* d'atomes de $g^{-n}\eta$. Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ désignent ces atomes, on a :

$$\int_{\eta_{\hat{x}}} \frac{q_{\hat{x}}\left[(g^{-n}\eta)_{\hat{t}}\right]}{\nu_{\hat{x}}\left[(g^{-n}\eta)_{\hat{t}}\right]}\, d\nu_{\hat{x}}(\hat{t}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{q_{\hat{x}}\left(A_i\right)}{\nu_{\hat{x}}\left(A_i\right)} \nu_{\hat{x}}(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} q_{\hat{x}}\left(A_i\right) = q_{\hat{x}}\left(\eta_{\hat{x}}\right) = 1.$$

Il y a donc bien égalité dans la ligne (11). □

On utilise maintenant le fait que la σ-algèbre $\bigvee_{n\geq 0} \mathcal{M}(g^{-n}\eta)$ coïncide avec celle des boréliens de $\widehat{X}$ pour obtenir l'expression de ν :

Lemme 5.6 *La mesure ν vérifie :*

$$\forall B \in \mathcal{M}\ ,\ \nu(B) = \int_{\widehat{X}} q_{\hat{x}}\left(B\right) d\nu(\hat{x}).$$

Démonstration : Notons $\tilde{\nu}$ la mesure définie par le membre de droite de l'énoncé. Il suffit de vérifier que $\tilde{\nu}$ et ν coïncident sur les σ-algèbres $\mathcal{M}(g^{-n}\eta)$ lorque n parcourt $\mathbb{N}$. En effet, cela implique que ces mesures coïncident sur la σ-algèbre $\vee_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{M}(g^{-n}\eta)$ qui n'est autre que l'algèbre des boréliens $\mathcal{M}$ (*cf.* prop. 1.3-(5)). Rappelons que $\mathcal{M}(g^{-n}\eta)$ est la σ-algèbre engendrée par les $g^{-n}\eta$-ensembles et les ensembles ν-négligeables (*cf.* section 2.3). Puisque $\tilde{\nu}$ est absolument continue par rapport à ν, les mesures $\tilde{\nu}$ et ν s'annulent sur les ensembles ν-négligeables. Soit maintenant B un $g^{-n}\eta$-ensemble, *i.e.* un borélien réunion d'une famille $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ d'atomes de $g^{-n}\eta$. D'après la proposition 1.3-(3), pour tout ν-presque tout $\hat{x}$, $B\cap\eta_{\hat{x}}$ est constitué d'une famille dénombrable $(A_{\alpha_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de tels atomes. Puisque $\nu_{\hat{x}}$ et $q_{\hat{x}}$ sont portées par $\eta_{\hat{x}}$, le lemme 5.5 entraîne :

$$\nu_{\hat{x}}(B) = \nu_{\hat{x}}(B\cap\eta_{\hat{x}}) = \nu_{\hat{x}}(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_{\alpha_j}) = q_{\hat{x}}(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_{\alpha_j}) = q_{\hat{x}}(B\cap\eta_{\hat{x}}) = q_{\hat{x}}(B).$$

On obtient alors $\tilde{\nu}(B) = \nu(B)$ en intégrant par rapport à ν sur $\widehat{X}$. □

Nous terminons la preuve du théorème 1.1 en exhibant une densité pour la mesure de probabilité $\mu = \pi_{0*}(\nu)$.

Lemme 5.7 *La mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure volume m sur X. Plus précisément, elle a pour densité :*

$$h(u) = \int_{A(u)} \frac{\Delta\left(\hat{x}, \sigma_{\hat{x}}(u)\right)}{L(\hat{x})} d\nu(\hat{x})$$

où $A(u) := \left\{\hat{x} \in \widehat{X}\ ,\ u \in \pi_0(\eta_{\hat{x}})\right\}$.

Démonstration : Le lemme 5.6 montre que pour tout borélien $B \subset X$:

$$\mu(B) = \nu(\pi_0^{-1}B) = \int_{\widehat{X}} \left[\int_{\pi_0\left[\pi_0^{-1}(B)\cap\eta_{\hat{x}}\right]} \frac{\Delta\left(\hat{x}, \sigma_{\hat{x}}(u)\right)}{L(\hat{x})} dm(u)\right] d\nu(\hat{x}).$$

Puisque l'on a $\pi_0\left[\pi_0^{-1}(B)\ \cap\ \eta_{\hat{x}}\right] = B \cap \pi_0\left(\eta_{\hat{x}}\right)$, on obtient :

$$\mu(B) = \int_B \left[\int_{\left\{\hat{x}\in\widehat{X}\ ,\ u\in\pi_0(\eta_{\hat{x}})\right\}} \frac{\Delta\left(\hat{x}, \sigma_{\hat{x}}(u)\right)}{L(\hat{x})} d\nu(\hat{x})\right] dm(u).$$

La mesure μ est donc absolument continue par rapport à la mesure volume m. □

6 Appendice : rappels de théorie ergodique

Nous présentons dans cette section les outils de théorie ergodique utilisés dans cet article. Les résultats fondamentaux sont le théorème de désintégration d'une mesure sur les atomes d'une partition *mesurable*, dû à Rokhlin, et le théorème de Kolmogorov-Sinaï, stipulant qu'une partition mesurable *génératrice* et d'*entropie finie* réalise l'entropie. Les références générales sont les articles de Rokhlin [Ro1], [Ro2] et de Pesin [P2]. On consultera aussi l'appendice du livre d'Anosov [An] et l'article de Coudène [Co].

Nous nous plaçons d'emblée dans le cadre du système dynamique $(\widehat{X}, g, \nu)$ (*cf.* section 2.3). On rappelle que $\mathcal{M}$ désigne la σ-algèbre engendrée par la tribu borélienne $\mathcal{B}$ et les ensembles ν-négligeables (*cf.* section 2.3). Notons que les résultats présentés ici sont encore valables dans le cadre plus général des *espaces de Lebesgue* (*cf.* [Ro2], §1).

6.1 Partitions

Une *partition* de $\widehat{X}$ est une collection de sous-ensembles disjoints et non vides recouvrant un borélien de $\widehat{X}$ de ν-mesure totale. On note ϵ la partition en points de $\widehat{X}$. Les éléments d'une partition ξ sont appelés *atomes* et on note indifféremment $\xi_{\hat{x}}$ ou $\xi(\hat{x})$ celui contenant $\hat{x}$. Un ξ*-ensemble* désigne une réunion (quelconque) d'atomes de ξ. On dit que deux partitions ξ et ζ sont *équivalentes* si il existe un borélien Z de ν-mesure totale tel que $\xi_{\hat{x}} \cap Z = \zeta_{\hat{x}} \cap Z$ pour tout $\hat{x} \in Z$. On confondra implicitement deux partitions équivalentes. Une partition ξ est *plus fine* qu'une partition ζ (noté $\xi \geq \zeta$) si on a $\xi_{\hat{x}} \subset \zeta_{\hat{x}}$ pour ν-presque tout $\hat{x}$.

Étant donnée une partition ξ, on note $\mathcal{M}(\xi)$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}$ engendrée par les ξ-ensembles de $\mathcal{B}$ et les ensembles ν-négligeables. Autrement dit, $\mathcal{M}(\xi)$ est la complétée (pour la mesure ν) de la σ-algèbre engendrée par les ξ-ensembles mesurables. Par exemple la sous-algèbre $\mathcal{M}(\epsilon)$ coïncide avec ce lle des boréliens $\mathcal{M}$.

Soit $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de partitions de $\widehat{X}$. On note $\vee_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{M}(\xi_i)$ la plus petite (*i.e.* l'intersection) des sous-algèbres de $\mathcal{M}$ contenant les éléments de la famille $(\mathcal{M}(\xi_i))_{i\in\mathbb{N}}$. On note $\vee_{i\in\mathbb{N}}\xi_i$ la partition dont les atomes sont les sous-ensembles $\cap_{i\in\mathbb{N}}A_i$, où $A_i \in \xi_i$. Observons que l'on a $(\vee_{i\in\mathbb{N}}\xi_i)(\hat{x}) = \cap_{i\in\mathbb{N}}\xi_i(\hat{x})$.

Soit ξ une partition de $\widehat{X}$ d'atomes $(\xi_\alpha)_{\alpha\in I}$. On note indifféremment $g(\xi)$ ou $g\xi$ la partition d'atomes $(g(\xi_\alpha))_{\alpha\in I}$. On a donc $(g\xi)_{\hat{x}} = g\left(\xi_{g^{-1}(\hat{x})}\right)$. Une partition ξ est dite *décroissante* si $g^{-1}(\xi)$ est plus fine que ξ. La partition $\bigvee_{p\geq 0} g^p(\xi)$ est bien sûr décroissante. On note ξ^- la partition $\bigvee_{p\geq 0} g^{-p}(\xi)$.

6.2 Partitions mesurables

Une partition ξ de $\widehat{X}$ est *mesurable* si il existe une famille dénombrable $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ξ-ensembles mesurables telle que

$$\forall\, C, C' \text{ atomes de } \xi\,,\ \exists n \in \mathbb{N} \,/\, C \subset B_n \text{ et } C' \subset B_n^c \ \text{ ou bien } \ C \subset B_n^c \text{ et } C' \subset B_n.$$

La partition en points ϵ est un exemple de partition mesurable. Si $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ désigne une famille de partitions mesurables, alors la partition $\vee_{i\in\mathbb{N}}\xi_i$ est encore mesurable et on a $\mathcal{M}(\vee_{i\in\mathbb{N}}\xi_i) = \vee_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{M}(\xi_i)$ (*cf.* [Ro1], §3.3). En particulier, si la partition $\vee_{i\in\mathbb{N}}\xi_i$ est équivalente à la partition en points ϵ, alors $\vee_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{M}(\xi_i)$ coïncide avec $\mathcal{M}$. On dispose du théorème fondamental suivant (*cf.* [Ro1], §3.1) :

Théorème 6.1 (Rokhlin) *Soit ξ une partition mesurable de $\widehat{X}$. Pour ν-presque tout $\hat{x} \in \widehat{X}$, il existe une mesure de probabilité $\nu_{\hat{x}}$ sur $\widehat{X}$ telle que :*

- *$\nu_{\hat{x}}$ est portée par l'atome $\xi_{\hat{x}}$ et ne dépend que de cet atome.*
- *pour tout borélien C de $\widehat{X}$, la fonction $\hat{x} \to \nu_{\hat{x}}(C)$ est mesurable et on a $\nu(C) = \int_{\widehat{X}} \nu_{\hat{x}}(C)\, d\nu(\hat{x})$.*

Une telle famille est ν-presque sûrement unique et on l'appelle une famille de probabilités conditionnelles de ν pour la partition ξ.

6.3 Entropie et générateurs

Soient ζ et ξ deux partitions mesurables de $\widehat{X}$. L'*entropie de* ζ et l'*entropie conditionnelle de* ζ *sachant* ξ sont définies respectivement par :

$$H(\zeta) := -\int_{\widehat{X}} \log \nu(\zeta_{\hat{x}})\, d\nu(\hat{x})$$

$$H(\zeta|\xi) := -\int_{\widehat{X}} \log \nu_{\xi,\hat{x}}(\zeta_{\hat{x}})\, d\nu(\hat{x})$$

où $(\nu_{\xi,\hat{x}})_{\hat{x}}$ est un système de probabilités conditionnelles de ν pour la partition ξ (*cf.* théorème 6.1). Par convention, on pose $\int_C \infty\, d\nu = 0$ (resp. ∞) si $\nu(C) = 0$ (resp. > 0). On dispose de l'égalité $H(\zeta \vee \xi|\xi) = H(\zeta|\xi)$.

L'*entropie de* ν *relativement à* ζ et l'*entropie de* ν sont définies par :

$$h_\nu(g,\zeta) := H(\zeta|g^{-1}\zeta^-) = H(\zeta|\bigvee_{p\geq 1} g^{-p}(\zeta))$$

$$h_\nu(g) := \sup\left\{h_\nu(g,\zeta)\ ,\ \zeta \text{ partition mesurable de } \widehat{X}\right\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dispose des égalités $h_\nu(g^n) = h_\nu(g^{-n})$, $h_\nu(g^n) = h_\mu(f^n)$ et $h_\mu(f^n) = n.h_\mu(f)$ (*cf.* [Ro2], §9).

On dit qu'une partition mesurable ζ est un *générateur* pour l'automorphisme g (ou g^{-1}) si pour ν-presque tout $\hat{x}$, l'atome $\left(\bigvee_{p\in\mathbb{Z}} g^p\zeta\right)(\hat{x})$ est réduit à $\{\hat{x}\}$ (*cf.* [Ro2], §3.5). Autrement dit, ζ est un générateur si la partition $\bigvee_{p\in\mathbb{Z}} g^p\zeta$ est équivalente à la partition en points ϵ. Nous utilisons le résultat fondamental suivant (*cf.* [Ro2], §9) :

Théorème 6.2 (Kolmogorov-Sinaï) *Si ζ est un générateur d'entropie finie, alors* $h_\nu(g) = H(g,\zeta)$.

Notons que l'existence d'un générateur est assez fréquente, mais il est difficile d'en trouver d'entropie *finie* (*cf.* [Ro2], §10).

Références

[An] D.V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature,* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, no. 90 (1967). Translated by S. Feder, American Mathematical Society (1969).

[Ar] L. Arnold, *Random Dynamical Systems,* Monog. in Math., Springer, 1998.

[BDu] F. Berteloot, C. Dupont, *Une caractérisation des exemples de Lattès de $\mathbb{P}^k$ par leur mesure de Green,* Comment. Math. Helv., **80** (2005), no. 2, 433-454.

[BD1] J.Y. Briend, J. Duval, *Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbb{CP}^k$,* Acta Math., **182** (1999), no. 2, 143-157.

[BD2] J.Y. Briend, J. Duval, *Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{CP}^k$,* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **93** (2001), 145-159.

[B] J. Buzzi, *The coding of non-uniformly expanding maps with application to endomorphisms of $\mathbb{P}^k$,* Ergodic Theory Dynamical Systems, **23** (2003), no. 4, 1015-1024.

[Ca] S. Cantat, *Caractérisation des exemples de Lattès et de Kummer,* preprint (2005).

[CFS] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, Ya. B. Sinaï, *Ergodic Theory,* Grund. Math. Wiss. No 245, Springer, 1985.

[Co] Y. Coudène, *Une version mesurable du théorème de Stone-Weierstrass,* Gaz. Math., **91** (2002), 10-17.

[DD] T.C. Dinh, C. Dupont, *Dimension de la mesure d'équilibre d'applications méromorphes,* J. Geom. Anal., **14** (2004), no. 4, 613-627.

[DS1] T.C. Dinh, N. Sibony, *Dynamique des applications d'allure polynomiale,* J. Math. Pures Appl. (9), **82** (2003), no. 4, 367-423.

[DS2] T.C. Dinh, N. Sibony, *Distributions des valeurs de transformations méromorphes et applications,* Comment. Math. Helv., **81** (2006).

[DS3] T.C. Dinh, N. Sibony, *Regularization of currents and entropy,* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4ème série, **37** (2004), no. 3, 959-971.

[D] C. Dupont, *Exemples de Lattès et domaines faiblement sphériques de $\mathbb{C}^n$,* Manuscripta Math., **111** (2003), no. 3, 357-378.

[G] V. Guedj, *Ergodic properties of rational mappings with large topological degree,* Ann. of Math., **161** (2005), no 3, 1589-1607.

[La] S. Lattès, *Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions rationnelles,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **166** (1918), 26-28.

[L1] F. Ledrappier, *Some properties of absolutely continuous invariant measure on an interval,* Ergodic Theory Dynamical Systems, **1** (1981), no. 1, 77-93.

[L2] F. Ledrappier, *Quelques propriétés ergodiques des applications rationnelles,* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **299** (1984), no. 1, 37-40.

[L3] F. Ledrappier, *Propriétés ergodiques des mesures de Sinaï,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **59** (1984), 163-188.

[LS] F. Ledrappier, J.M. Strelcyn, *A proof of the estimation from below in Pesin entropy formula,* Ergodic Theory Dynamical Systems, **2** (1982), no. 2, 203-219.

[LY] F. Ledrappier, L.S. Young, *The metric entropy of diffeomorphisms. Part I : Characterization of measures satisfaying Pesin's entropy formula,* Ann. of Math. (2), **122** (1985), no. 3, 509-539.

[Ma] R. Mañé, *A proof of Pesin's formula,* Ergodic Theory Dynamical Systems, **1** (1981), no. 1, 95-102.

[Mi] J. Milnor, *On Lattès Maps,* Stony Brook IMS Preprint (2004), http ://www.math.sunysb.edu/~jack/

[P1] Ja. B. Pesin, *Description of the* Π*-partition of a diffeomorphism with invariant smooth measure,* Math. Zametki, **21**(6), (1977), 29-44. Translated in Math. Notes, **22**(1), (1977), 506-515.

[P2] Ja. B. Pesin, *Characteristic Lyapounoff exponents and smooth ergodic theory,* Russ. Math. Surveys, **32** (1977), no. 4, 55-114.

[QZ] M. Qian, S. Zhu, *SRB measures and Pesin's entropy formula for endomorphisms,* Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2002), no. 4, 1453-1471.

[Ro1] V. A. Rokhlin, *On the fundamental ideas in measure theory,* Amer. Math. Soc. Transl. (1), **10** (1962), 1-54.

[Ro2] V. A. Rokhlin, *Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations,* Russ. Math. Surveys, **22** (1967), no. 5, 1-52.

[Ru1] D. Ruelle, *An inequality for the entropy of differentiable maps,* Bol. Soc. Brasil Mat., **9** (1978), no. 1, 83-87.

[Ru2] D. Ruelle, *Ergodic theory of differentiable dynamical systems,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **50** (1979), 27-58.

[RS] A. Russakovskii, B. Shiffman, *Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics,* Ind. Univ. Math. J., **46** (1997), 897-932.

[S] N. Sibony, *Dynamique des applications rationnelles de* $\mathbb{P}^k$*,* in Dynamique et Géométrie Complexes, Panoramas et Synthèses No 8, SMF et EDP Sciences, 1999.

Christophe Dupont
Bât. 425, Mathématique, UMR 8628
Université Paris-Sud
91405 Orsay Cedex, France.

christophe.dupont@math.u-psud.fr