Dimension de la mesure d'équilibre d'applications méromorphes

Tien-Cuong Dinh et Christophe Dupont

January 12, 2005

Abstract

Let f be a dominating meromorphic self-map of a compact Kähler manifold. Assume that the topological degree of f is larger than the other dynamical degrees. We give estimates of the dimension of the equilibrium measure of f, which involve the Lyapounov exponents.

2000 Mathematics Subject Classification : 37C45, 37F10, 32H50.
Key Words : dimension theory, equilibrium measure, Lyapounov exponent.

1 Introduction

Soient X une variété kählérienne compacte de dimension k et $f : X \to X$ une application méromorphe dominante. On note d_t son degré topologique, λ_{k-1} son $(k-1)$-ième degré dynamique (cf section 2.1), et on suppose que $d_t > \lambda_{k-1}$. Fixons aussi une forme de Kähler ω sur X, normalisée par $\int_X \omega^k = 1$. Sous ces hypothèses, Guedj a montré dans [G] que la suite de mesures :

$$\mu_n := \frac{1}{d_t^n} f^{n*} \omega^k$$

converge vers une mesure de probabilité invariante μ (cf aussi [RS], [DS1] et [DS2]). Ce résultat avait été établi auparavant pour les applications holomorphes de degré algébrique $d \geq 2$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^k$ (alors $d_t = d^k$ et $\lambda_{k-1} = d^{k-1}$) et pour les applications d'allure polynomiale. On consultera à ce sujet les livres de Berteloot-Mayer [BM] (en dimension 1) et de Sibony [S] (en dimension supérieure). On trouvera aussi dans ces ouvrages une bibliographie plus détaillée.

La mesure limite μ intègre les fonctions *quasi-psh*, ce qui assure l'existence de ses exposants de Lyapounov. Nous les noterons en ordre croissant $\chi_1 \leq \cdots \leq \chi_k$. Si Σ désigne leur somme, on dispose des inégalités (cf [BD], [DS1], [G]) :

$$\chi_1 \geq \frac{1}{2} \log \frac{d_t}{\lambda_{k-1}} \quad \text{et} \quad 2\Sigma \geq \log d_t.$$

D'une manière générale, les exposants de Lyapounov sont reliés à l'entropie et à la dimension de μ, notées respectivement $h(\mu)$ et $\dim_{\mathcal{H}}(\mu)$ (cf section 2.4). Par exemple, si f désigne une fraction rationnelle de degré d sur $\mathbb{P}^1$, on a $h(\mu) = \log d = \dim_{\mathcal{H}}(\mu).\chi$, où χ est l'unique exposant de μ (cf [L], [M]). Une telle formule provient du caractère conforme de f. Notons qu'il existe une relation semblable pour les difféomorphismes des surfaces réelles compactes [Y].

En dimension complexe plus grande que 1, les applications méromorphes ne sont plus conformes. On connaît une minoration de la dimension lorsque μ est une masse de Monge-Ampère à potentiel höldérien (par exemple si f est holomorphe sur $\mathbb{P}^k$, [B] §III.2, [S] §1.7). Cette minoration fait apparaître l'exposant de Hölder. Notons que μ ne possède pas toujours cette propriété de régularité. On dispose aussi d'une majoration faisant intervenir les exposants lorsque f est un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$ d'origine polynomiale [BdM].

Le but de cet article est d'établir l'encadrement suivant :

Théorème 1.1 *Sous les hypothèses précédentes, la dimension de μ vérifie :*

$$\frac{\log d_t}{\chi_k} \leq \dim_{\mathcal{H}}(\mu) \leq 2k - \frac{2\Sigma - \log d_t}{\chi_k}. \tag{1}$$

La démonstration repose essentiellement sur l'existence et le contrôle des branches inverses des itérés de f le long d'orbites négatives typiques (cf la proposition 3.1). Nous donnons dans le cas méromorphe un énoncé semblable au cas holomorphe, dû à Briend-Duval [BD]. Le nouvel ingrédient est le contrôle de la vitesse d'approche des orbites négatives vers l'ensemble $\mathcal{J}$ qui contient les ensembles d'indétermination de f et f^{-1}. L'intégrabilité de la fonction $\log(\mathrm{dist}\,(.,\mathcal{J}))$ (cf lemme 3.2) joue ici un rôle crucial. Notre énoncé apporte aussi une précision supplémentaire : il permet de comparer les familles de branches inverses $(f^{-n})_{n\geq 0}$ définies au voisinage de $f^p(x)$ lorsque p varie. Il stipule par exemple que le rayon de la boule sur laquelle elles sont définies décroît exponentiellement lentement lorsque p devient grand.

Esquissons la preuve de la majoration de (1). Nous reprenons en partie la méthode de Binder et DeMarco [BdM]. Il s'agit d'introduire un borélien A de mesure positive sur lequel on dispose d'un contrôle uniforme des branches inverses. La proposition 3.1 nous fournit des suites $(r_n)_n$ et $(\gamma_n)_n$ à décroissance lente telles que pour tout $x \in A$ et pour tout $n \geq 0$:

- la branche inverse g_n de f^n vérifiant $g_n(f^n(x)) = x$ existe sur $\mathcal{B}_n := B_{f^n(x)}(r_n)$,
- l'ouvert $g_n(\mathcal{B}_n)$ contient $\mathcal{B}'_n = B_x(\gamma_n e^{-n\chi_k})$,
- le volume de $g_n(\mathcal{B}_n)$ est majoré par $ce^{-2n\Sigma}$, où c est une constante.

On a noté $B_x(r)$ la boule ouverte centrée en x et de rayon r. Les boules du type $\mathcal{B}'_n$ permettent alors de construire des recouvrements de A de diamètre arbitrairement petit, et l'estimation sur le volume donne une borne sur leur cardinal. On obtient ainsi la majoration indiquée.

Venons-en à la minoration. Elle repose sur le résultat classique suivant (cf [Y]) :

Théorème 1.2 *Soit Λ un borélien de X tel que $\mu(\Lambda) > 0$. Supposons que pour tout $x \in \Lambda$, il existe une suite décroissante de réels positifs $(\rho_n(x))_{n\geq 0}$ vérifiant :*

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_n(x) = 0 \ , \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\log \rho_{n+1}(x)}{\log \rho_n(x)} = 1 \tag{2}$$

et

$$a \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{\log \mu(B_x(\rho_n(x)))}{\log \rho_n(x)} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log \mu(B_x(\rho_n(x)))}{\log \rho_n(x)} \leq b. \tag{3}$$

Alors la dimension de Hausdorff de Λ vérifie $a \leq \dim_{\mathcal{H}}(\Lambda) \leq b$.

Notons que seule la minoration sera utilisée, sous la forme du corollaire :

Corollaire 1.3 *Si il existe un borélien Λ de X vérifiant les propriétés (2) et (3), alors la dimension de μ satisfait :*

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mu) \geq a.$$

En effet, si Z est un borélien de X de mesure 1, alors les points de $\Lambda \cap Z$ satisfont (2) et (3), ce qui entraîne $\dim_{\mathcal{H}}(Z) \geq \dim_{\mathcal{H}}(\Lambda \cap Z) \geq a$.

L'ensemble Λ sera en fait de mesure 1, et proviendra de la proposition sur les branches inverses. Nous prendrons pour $B_x(\rho_n(x))$ les boules $\mathcal{B}'_n$ introduites plus haut : la décroissance lente de leur rayon nous assure que (2) est bien satisfaite. La minoration dans (1) est alors conséquence du corollaire. Signalons que la borne $a = \frac{\log d_t}{\chi_k}$ obtenue dans le théorème provient du fait que μ est de jacobien constant d_t (cf section 2.1).

Dans le cas holomorphe, le théorème 1.1 se reformule ainsi :

Corollaire 1.4 *Soit f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$ de degré algébrique $d \geq 2$. Alors la dimension de la mesure d'équilibre μ de f vérifie :*

$$\frac{k \log d}{\chi_k} \leq \dim_{\mathcal{H}}(\mu) \leq 2k - \frac{2\Sigma - k \log d}{\chi_k} \leq 2k - 2 + \frac{\log d}{\chi_k}.$$

La dernière majoration provient de l'inégalité $\chi_1 \geq \frac{1}{2} \log d$ due à Briend-Duval [BD]. On retrouve alors l'estimation de Binder-DeMarco établie pour les endomorphismes f d'origine polynomiale [BdM]. Lorsque les exposants de Lyapounov sont minimaux, i.e. égaux à $\frac{1}{2} \log d$, les inégalités ci-dessus deviennent des égalités, et seuls les exemples de Lattès vérifient cette propriété (cf [BDu], [D]). Notons que notre résultat reste valable pour les applications à allure polynomiale dont la mesure d'équilibre intègre les fonctions *psh* [DS1]. On obtient également ces estimations dans un cadre *réel*. Par exemple, il est possible d'associer à des revêtements ramifiés sur des variétés riemaniennes des "mesures d'équilibre" μ naturelles (cf [DS1] §2). Elles sont de jacobien constant d_t, et le jacobien de f est μ-intégrable (cf section 2.1). Si les exposants de μ sont strictement positifs (cette hypothèse est toujours satisfaite en dimension 1), on démontre de même la proposition 3.1 sur les branches inverses et on en déduit un encadrement analogue sur la dimension de μ.

L'article s'organise de la manière suivante. La deuxième section consiste en des généralités : nous y précisons les notations, ainsi que la définition des fonctions à variation lente. La section suivante est consacrée à la proposition sur les branches inverses. La démonstration du théorème 1.1 occupe finalement le dernier paragraphe.

Remerciements : Nous remercions le referee pour sa lecture attentive. Ses remarques judicieuses nous ont aidé à améliorer la rédaction de l'article.

2 Généralités

2.1 Définitions et remarques

Nous travaillons avec la métrique induite par une forme de Kähler ω fixée. Pour simplifier les estimations, nous l'identifions parfois dans les cartes avec la métrique standard. Une fonction u sur X est *quasi-plurisousharmonique* (*quasi-psh*) si elle est intégrable, semi-continue supérieurement et vérifie $i\partial\bar{\partial}u \geq -c\omega$, où $c \geq 0$. Autrement dit, localement, u est la somme d'une fonction *psh* et d'une fonction lisse.

Pour tout $x \in X$ et $r > 0$, on note $B_x(r)$ la boule ouverte centrée en x et de rayon r. Le diamètre et le volume d'une partie A de X sont respectivement notés $\mathrm{diam}\,(A)$ et $\mathrm{vol}\,(A)$. La distance d'un point $x \in X$ à une partie A est notée $\mathrm{dist}\,(x, A)$. On note aussi $\mathrm{Lip}\,(h)$ la constante de Lipschitz d'une application $h : U \to X$ définie sur un ouvert U de X.

Soient X_1 et X_2 deux variétés complexes compactes, $Z := X_1 \times X_2$ et π_1, π_2 les projections de Z sur ses facteurs. Par définition, une application méromorphe multivaluée $g : X_1 \to X_2$ est la donnée de sous-ensembles analytiques Γ de Z et $\mathcal{A}$ de X_1 tels que $\pi_1^{-1}(\mathcal{A})$ ne contient aucune composante de Γ et tels que la restriction $\pi_1 : \Gamma \setminus \pi_1^{-1}(\mathcal{A}) \to X_1 \setminus \mathcal{A}$ est un revêtement non ramifié de degré d. En particulier, $\mathcal{A}$ contient l'ensemble d'indétermination de g (*i.e.* les points $x \in X_1$ tels que $\pi_1^{-1}(x) \cap \Gamma$ est infini) et les singularités de Γ sont contenues dans $\pi_1^{-1}(\mathcal{A})$. Au voisinage de tout point $z \notin \mathcal{A}$, l'application g est donc une collection de d applications holomorphes $g_1, \ldots, g_d$ et on pose :

$$\|\, dg(z) \,\| := \max_{i \in \{1, \ldots, d\}} \|\, dg_i(z) \,\| \;\;,\;\; \left\| \, d^2 g(z) \, \right\| := \max_{i \in \{1, \ldots, d\}} \left\| \, d^2 g_i(z) \, \right\| .$$

Pour $A \subset X_1$ et $B \subset X_2$, posons $g(A) := \pi_2(\pi_1^{-1}(A) \cap \Gamma)$ et $g^{-1}(B) := \pi_1(\pi_2^{-1}(B) \cap \Gamma)$. Nous utiliserons le résultat suivant :

Lemme 2.1 *Soient $g : X_1 \to X_2$, g_i et $\mathcal{A}$ comme ci-dessus. Il existe des constantes $\tau > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$ telles que pour tout $x \in X_1 \setminus \mathcal{A}$, on a*

$$\| dg(x) \| + \left\| d^2 g(x) \right\| \leq \tau \, \mathrm{dist}\,(x, \mathcal{A})^{-p}$$

et

$$\mathrm{dist}\,(g_i(x), g(\mathcal{A})) \leq \tau \, \mathrm{dist}\,(x, \mathcal{A})^{1/p}.$$

DÉMONSTRATION : Vérifions que l'on peut supposer que Γ est lisse. Posons à cet effet $\mathcal{A}' := \pi_1^{-1}(\mathcal{A})$. D'après le théorème de désingularisation d'Hironaka [H], il existe une variété complexe compacte $\widetilde{Z}$, une sous-variété lisse $\widetilde{\Gamma}$ de $\widetilde{Z}$ et une application holomorphe $\pi : \widetilde{Z} \to Z$ telles que π soit d'une part une bijection entre $\widetilde{Z} \setminus \pi^{-1}(\mathcal{A}')$ et $Z \setminus \mathcal{A}'$ et d'autre part une bijection entre $\widetilde{\Gamma} \setminus \pi^{-1}(\mathcal{A}')$ et $\Gamma \setminus \mathcal{A}'$. Puisque l'application $\pi_1 \circ \pi : \widetilde{\Gamma} \to X_1$ est holomorphe, son inverse $\widetilde{g} : X_1 \to \widetilde{\Gamma}$ est une application méromorphe multivaluée. Ainsi, g est la composée de $\widetilde{g}$ par l'application holomorphe $\pi_2 \circ \pi$ dont la différentielle est uniformément bornée. Donc, quitte à remplacer g par $\widetilde{g}$, on peut supposer que Γ est lisse.

Soient $(a, b) \in \Gamma$ et M, N des cartes de X_1, X_2 contenant respectivement a et b. On les munit de coordonnées $(x_1, \ldots, x_k)$ et $(y_1, \ldots, y_l)$ telles que $a = 0$ et $b = 0$. Soit $U \Subset M \times N$ un voisinage de $(0, 0)$. Fixons $(x, y) \in \Gamma \cap U$ et notons $\mathcal{B} \subset M \setminus \mathcal{A}$ la boule centrée en x de rayon maximal telle que la composante $\Gamma_{(x,y)}$ de $\pi_1^{-1}(\mathcal{B}) \cap \Gamma$ contenant (x, y) soit incluse dans $M \times N$. Soit g^* l'application univalente définie sur $\mathcal{B}$ de graphe $\Gamma_{(x,y)}$.

Montrons la première inégalité. Nous allons estimer les dérivées de g^* en x en utilisant la formule de Cauchy. Puisque g^* est bornée (elle prend ses valeurs dans N), il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ contient une boule centrée en x et de rayon $\tau'' \mathrm{dist}\,(x, \mathcal{A})^q$, où $\tau'' > 0$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Observons que sur la variété *lisse* $\Gamma \cap M \times N$ de dimension k, les formes holomorphes dy_j s'écrivent de façon unique comme combinaisons linéaires des formes dx_i à coefficients méromorphes. Ces coefficients sont en fait holomorphes hors de $\mathcal{A}'$ car Γ y est localement une union de graphes. Ainsi, quitte à restreindre M et N, on a $\| dg^*(z) \| \leq \tau' \, \mathrm{dist}\,(z, \mathcal{A})^{-q}$ pour tout $z \in \mathcal{B}$, où $\tau' > 0$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On en déduit, d'après l'inégalité des accroissements finis, qu'il existe une boule centrée en x et de rayon $\tau'' \, \mathrm{dist}\,(x, \mathcal{A})^q$ contenue dans $\mathcal{B}$. On utilise ici le fait que $\Gamma \cap M \times N$ est une sous-variété de $M \times N$ et le fait que $\pi_1 : \Gamma \setminus \mathcal{A}' \to X_1 \setminus \mathcal{A}$ est un revêtement non ramifié. La première inégalité en découle.

Passons à la deuxième inégalité. En posant $y := g^*(x)$, il suffit de montrer $\mathrm{dist}\,(y, g(\mathcal{A})) \lesssim \mathrm{dist}\,(x, \mathcal{A})^{1/p}$. Soient u et v des fonctions holomorphes vectorielles sur M et N telles que $\mathcal{A} = \{u = 0\}$ dans M et $g(\mathcal{A}) = \{v = 0\}$ dans N. On dispose des estimations suivantes, avec $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{dist}\,(x, \mathcal{A})^q \lesssim \|u(x)\| \lesssim \mathrm{dist}\,(x, \mathcal{A}), \tag{4}$$

$$\mathrm{dist}\,(y, g(\mathcal{A}))^q \lesssim \|v(y)\| \lesssim \mathrm{dist}\,(y, g(\mathcal{A})). \qquad (5)$$

Les inégalités de gauche sont celles de Lojasiewicz ([Lo], IV.7.2) et celles de droite proviennent de l'inégalité des accroissements finis. Observons que l'ensemble analytique $\mathcal{A}_1 := \{z \in \Gamma \cap M \times N,\ u \circ \pi_1(z) = 0\}$ est contenu dans $\mathcal{A}_2 := \{z \in \Gamma \cap M \times N,\ v \circ \pi_2(z) = 0\}$. La variété $\Gamma \cap M \times N$ étant lisse, on obtient les inégalités suivantes de la même manière que (4) et (5) :

$$\begin{aligned} \|v(y)\| = \|v \circ \pi_2(x,y)\| &\lesssim \mathrm{dist}_\Gamma((x,y), \mathcal{A}_2) \\ &\leq \mathrm{dist}_\Gamma((x,y), \mathcal{A}_1) \lesssim \|u \circ \pi_1(x,y)\|^{1/q'} = \|u(x)\|^{1/q'}. \end{aligned}$$

Cela termine la démonstration $\square$

Dans toute la suite, $f : X \to X$ désigne une application méromorphe *dominante*. Cela signifie que son jacobien (défini plus bas) n'est identiquement nul sur aucun ouvert de X. Notons que l'application $f^{-1} : X \to X$ est méromorphe et multivaluée. Soient d_t le *degré topologique* de f, $\mathcal{C}$ son ensemble critique et $\mathcal{I}$ son ensemble d'indétermination. On pose $\mathcal{J}' := f(\mathcal{C} \cup \mathcal{I})$ et $\mathcal{J} := \mathcal{J}' \cup f^{-1}(\mathcal{J}')$. Dans la section 3, nous appliquerons le lemme 2.1 à $g = f$ et $g = f^{-1}$ avec $\mathcal{A} := \mathcal{I}$ ou $\mathcal{J}'$.

Pour tout $l \in \{1, \ldots, k\}$, on définit la forme $f^*\omega^l$ comme l'extension triviale de $(f_{|X \setminus \mathcal{I}})^*\omega^l$ à travers $\mathcal{I}$. Avec cette convention, $\mathrm{Jac}\,(f)$ est la fonction positive sur X vérifiant $f^*\omega^k = \mathrm{Jac}\,(f).\omega^k$. Les *degrés dynamiques* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de f sont définis par (cf [RS], [DS3]) :

$$\lambda_l := \lim_{n \to \infty} \left(\int_X f^{n*}\omega^l \wedge \omega^{k-l} \right)^{1/n}.$$

Sous l'hypothèse $d_t > \lambda_{k-1}$, la suite de mesure $\mu_n := \frac{1}{d_t^n} f^{n*}\omega^k$ converge vers une mesure de probabilité invariante ergodique μ vérifiant (cf [RS], [G], [DS2]) :

(α) Les fonctions *quasi-psh* sur X sont μ-intégrables.

(β) μ est de jacobien constant d_t : pour tout A borélien de $X \setminus \mathcal{I}$ sur lequel f est injective, on a $\mu(f(A)) = d_t.\mu(A)$.

La propriété (α) montre que la fonction $\log(\mathrm{dist}\,(x, \mathcal{J}))$ est μ-intégrable. En effet, elle est minorée par une fonction *quasi-psh* sur X. C'est clair si X est une variété projective. Si X est seulement kählérienne, ceci résulte d'un résultat de Blanchard (cf [DS2], App. A.1). Il s'ensuit $\mu(\mathcal{J}) = 0$. D'après le lemme 2.1 appliqué à f et f^{-1}, on peut majorer les valeurs absolues des fonctions $\log \|\, df(x)^{\pm 1} \,\|$ et $\log(\mathrm{Jac}\, f(x))$ par une fonction du type $c_1 - c_2 \log(\mathrm{dist}\,(x, \mathcal{J}))$, où c_1 et c_2 sont des constantes positives. Par exemple, les deux inégalités dans le lemme 2.1 appliquées à f^{-1} donnent

$$\|\, df(x)^{-1} \,\| \leq \|\, (df^{-1})(f(x)) \,\| \lesssim \mathrm{dist}\,(f(x), \mathcal{J}')^{-p} \lesssim \mathrm{dist}\,(x, \mathcal{J})^{-q}.$$

Les fonctions $\log \| df(x)^{\pm 1} \|$ et $\log(\mathrm{Jac}\, f(x))$ sont donc μ-intégrables et les exposants de Lyapounov $\chi_1 \leq \cdots \leq \chi_k$ de μ sont bien définis. On dispose de l'égalité :

$$2\Sigma := 2(\chi_1 + \cdots + \chi_k) = \int_X \log \mathrm{Jac}\,(f)\, d\mu$$

et de l'inégalité $2\Sigma \geq \log d_t$ (cf par exemple [DS1]). Rappelons que les exposants χ_1 et χ_k sont définis par :

$$-\chi_1 = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \int_X \log \| df^N(x)^{-1} \| \, d\mu(x) = \inf_{N \geq 1} \left\{ \frac{1}{N} \int_X \log \| df^N(x)^{-1} \| \, d\mu(x) \right\}$$

et

$$\chi_k = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \int_X \log \| df^N(x) \| \, d\mu(x) = \inf_{N \geq 1} \left\{ \frac{1}{N} \int_X \log \| df^N(x) \| \, d\mu(x) \right\}.$$

Ces égalités nous permettent de remplacer f par une itérée dans la démonstration du théorème 1.1. En effet, le degré topologique de f^N est d_t^N et μ est aussi la mesure d'équilibre de f^N, d'exposants $N\chi_1, \ldots, N\chi_k$. On peut donc supposer que pour $0 < \epsilon_0 < 1$ fixé, on a :

$$-\chi_1 \leq \int_X \log \| df(x)^{-1} \| \, d\mu(x) \leq -\chi_1(1 - \epsilon_0) \tag{6}$$

et

$$\chi_k \leq \int_X \log \| df(x) \| \, d\mu(x) \leq \chi_k(1 + \epsilon_0). \tag{7}$$

2.2 Extension naturelle

Il s'agit ici de rendre inversible le système dynamique (X, f, μ) en considérant son *extension naturelle* (cf [CFS], Chap.10, §4). Posons :

$$\widehat{X} := \left\{ \hat{x} := (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \,,\ f(x_n) = x_{n+1} \right\} \subset X^{\mathbb{Z}}$$

muni de la topologie produit. On note $\pi_0 : \hat{x} \mapsto x_0$ la projection "au temps zéro", et $\hat{f}$ le décalage à gauche sur $\widehat{X}$ de sorte que $f \circ \pi_0 = \pi_0 \circ \hat{f}$. L'*extension naturelle* de (X, f, μ) est le système dynamique $(\widehat{X}, \hat{f}, \hat{\mu})$, où $\hat{\mu}$ est l'unique mesure de probabilité sur $\widehat{X}$, invariante par $\hat{f}$, vérifiant $\hat{\mu}(\pi_0^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour tout borélien A de X. Cette mesure est ergodique car μ est elle-même ergodique.

Observons que l'extension naturelle offre un cadre de travail commode pour définir les branches inverses des itérés de f. Pour tout $\hat{x} \in \widehat{X}$, on note (lorsqu'elle existe) $f_{\hat{x}}^{-n}$ la branche inverse de f^n définie au voisinage de x_0, vérifiant $f_{\hat{x}}^{-n}(x_0) = x_{-n}$. Cependant, l'intérêt de l'extension naturelle ne s'arrête pas à ce formalisme. L'invariance de $\hat{\mu}$ par le décalage *et* son inverse sont cruciales. Cela apparaît dans la preuve du lemme 2.3 (le théorème de Birkhoff est utilisé avec $\hat{f}$ et $\hat{f}^{-1}$) et de manière cachée dans les démonstrations des inégalités du théorème 1.1.

Nous terminons cette section en introduisant le borélien $\hat{f}$-invariant

$$\widehat{X}^* := \left\{ \hat{x} \in \widehat{X} \, , \, x_n \notin \mathcal{J} \, , \, \forall n \in \mathbb{Z} \right\}$$

où $\mathcal{J}$ a été introduit à la section 2.1. Cet ensemble est de mesure totale, car $\mu(\mathcal{J}) = 0$. Signalons qu'on lui supprimera par la suite des ensembles de mesure nulle, sans pour autant changer de notation.

2.3 Fonctions à variation lente

La preuve du théorème 1.1 repose sur l'existence des branches inverses le long d'orbites négatives typiques. Il sera aussi nécessaire de pouvoir comparer les familles de branches inverses $\left(f^{-n}_{\hat{f}^p(x)} \right)_{n \geq 0}$ lorsque p devient grand. On s'intéresse en particulier aux variations du rayon de la boule sur laquelle celles-ci sont définies. Cela nous amène à introduire la définition de fonction à *variation lente*, qui rejoint celle de fonction *tempérée* ([KH], Chap.S. §2) :

Définition 2.2 *Soit $\epsilon > 0$. Une fonction mesurable $S : \widehat{X} \to \mathbb{R}^*_+$ est dite ϵ-lente si il existe une fonction mesurable $\tilde{S}_1 : \widehat{X} \to \mathbb{R}^*_+$ vérifiant :*

$$\forall \, \hat{x} \;\; \hat{\mu}\text{-p.p.} \; , \; \forall q \geq 1 \; , \; S(\hat{f}^q(\hat{x})) \geq e^{-q\epsilon} \tilde{S}_1(\hat{x}).$$

S est dite ϵ-rapide si il existe une fonction mesurable $\tilde{S}_2 : \widehat{X} \to \mathbb{R}^*_+$ telle que :

$$\forall \, \hat{x} \;\; \hat{\mu}\text{-p.p.} \; , \; \forall q \geq 1 \; , \; S(\hat{f}^q(\hat{x})) \leq e^{q\epsilon} \tilde{S}_2(\hat{x}).$$

Observons que le supremum et l'infimum d'une famille finie de fonctions ϵ-rapides (resp. ϵ-lentes) sont encore des fonctions ϵ-rapides (resp. ϵ-lentes). On peut aussi supposer que $\tilde{S}_1$ (resp. $\tilde{S}_2$) prend ses valeurs dans $]0,1]$ (resp. $[1,+\infty[$). Le lemme qui suit repose sur le théorème de Birkhoff.

Lemme 2.3 *Soient $\epsilon > 0$ et $u : X \to \mathbb{R}^*_+$ une fonction mesurable telle que $\log u \in L^1(\mu)$. Posons $\chi := \int_X \log u \, d\mu$.*

(a) *Il existe une fonction ϵ-lente $V_1 : \widehat{X} \to]0,1]$, et une fonction ϵ-rapide $V_2 : \widehat{X} \to [1,+\infty[$ vérifiant :*

$$\forall \, \hat{x} \;\; \hat{\mu}\text{-p.p.} \; , \; \forall n \geq 1 \; , \; V_1(\hat{x}) e^{n(\chi - \epsilon)} \leq \prod_{j=1}^{n} u(x_{-j}) \leq V_2(\hat{x}) e^{n(\chi+\epsilon)}.$$

(b) *Il existe une fonction ϵ-lente $V : \widehat{X} \to]0,1]$ vérifiant :*

$$\forall \hat{x} \ \hat{\mu}\text{-}p.p. \ , \ \forall n \geq 0 \ , \ u(x_{-n}) \geq V(\hat{x}) e^{-n\epsilon}.$$

DÉMONSTRATION : Montrons la première partie. Il suffit d'établir l'existence de V_2, car celle de V_1 s'en déduit en considérant la fonction $1/u$. Le théorème de Birkhoff, appliqué aux systèmes $(\widehat{X}, \hat{f}, \hat{\mu})$, $(\widehat{X}, \hat{f}^{-1}, \hat{\mu})$ et à la fonction $\hat{x} \mapsto \log u(x_0)$, fournit :

$$\forall \hat{x} \ \hat{\mu}\text{-p.p.} \ , \ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log u(x_{-j}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log u(x_j) = \chi.$$

Il existe donc une fonction mesurable $p : \widehat{X} \to [1, +\infty[$ vérifiant :

$$\forall \hat{x} \ \hat{\mu}\text{-p.p.} \ , \ \forall n \geq 1 \ , \ \prod_{j=1}^{n} u(x_{-j}) \leq p(\hat{x}) e^{n(\chi + \epsilon/2)},$$

$$\forall \hat{x} \ \hat{\mu}\text{-p.p.} \ , \ \forall n \geq 0 \ , \ p(\hat{x})^{-1} e^{n(\chi - \epsilon/2)} \leq \prod_{j=0}^{n} u(x_j) \leq p(\hat{x}) e^{n(\chi + \epsilon/2)}. \tag{8}$$

Posons

$$V_2'(\hat{x}) := \sup_{n \geq 1} \left\{ \prod_{j=1}^{n} u(x_{-j}) e^{-n(\chi + \epsilon/2)} \right\} \ \text{ et } \ V_2(\hat{x}) := \max \left\{ 1, V_2'(\hat{x}) \right\}.$$

Ces fonctions sont bien finies presque partout. La fonction V_2 vérifie l'inégalité voulue. Nous montrons maintenant qu'elle est ϵ-rapide. Fixons $\hat{x}$ générique, et posons $p := p(\hat{x})$, $V_2 := V_2(\hat{x})$, $\tau_\pm := e^{\chi \pm \epsilon/2}$ et $\pi_n := \prod_{j=0}^{n} u(x_j)$. La ligne (8) s'écrit alors $p^{-1}\tau_-^n \leq \pi_n \leq p\tau_+^n$. Ainsi, pour tout $q \geq 1$:

$$\begin{aligned}
V_2'(\hat{f}^q(\hat{x})) \ &\leq \ \sup \left\{ \frac{\pi_{q-1}\tau_+^{-1}}{\pi_{q-2}}, \ldots, \frac{\pi_{q-1}\tau_+^{1-q}}{\pi_0}, \pi_{q-1}\tau_+^{-q}, \pi_{q-1}\tau_+^{-q} V_2 \right\} \\
&\leq \ \sup \left\{ \frac{p^2 \tau_+^{q-2}}{\tau_-^{q-2}}, \ldots, p^2, p\tau_+^{-1}, p\tau_+^{-1} V_2 \right\} \\
&\leq \ \sup \left\{ p^2 e^{(q-2)\epsilon}, \ldots, p^2, p\tau_+^{-1}, p\tau_+^{-1} V_2 \right\} \\
&\leq \ p^2 e^{q\epsilon} \max(1, \tau_+^{-1}) V_2
\end{aligned}$$

car $p \geq 1$ et $V_2 \geq 1$. Ceci entraîne que V_2 est ϵ-rapide.

Le point (b) est une conséquence du point (a) en remplaçant ϵ par $\epsilon/2$: l'inégalité est satisfaite avec la fonction $V(\hat{x}) := \min\{1, u(x_0), e^{\chi} V_1/V_2\}$. $\square$

2.4 Dimensions

Nous rappelons la définition de la dimension de Hausdorff et celle de la dimension d'une mesure. On consultera par exemple les livres de Falconer ([F], Chap.2) et de Pesin ([P], Chap.2). Soit Λ une partie de X. Pour tout $\alpha \geq 0$ et $\delta > 0$, on note :

$$\Lambda_{\alpha,\delta}(\Lambda) := \inf_{\mathcal{G}_\delta} \Big\{ \sum_{U \in \mathcal{G}_\delta} (\text{diam } U)^\alpha \Big\}$$

où $\mathcal{G}_\delta$ parcourt l'ensemble des recouvrements de Λ par une famille finie ou dénombrable d'ouverts de diamètre inférieur à δ. La *α-mesure de Hausdorff* et la *dimension de Hausdorff* de Λ sont alors définies par :

$$\Lambda_\alpha(\Lambda) := \lim_{\delta \to 0} \uparrow \Lambda_{\alpha,\delta}(\Lambda),$$

$$\dim_{\mathcal{H}}(\Lambda) := \inf \Big\{ \alpha \geq 0 \, , \, \Lambda_\alpha(\Lambda) = 0 \Big\} = \sup \Big\{ \alpha \geq 0 \, , \, \Lambda_\alpha(\Lambda) = +\infty \Big\}$$

et la *dimension* de μ est égale à :

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mu) := \inf \Big\{ \dim_{\mathcal{H}}(Z) \, , \, Z \text{ borélien de } X \, , \, \mu(Z) = 1 \Big\}.$$

Celle-ci nous renseigne sur la manière dont μ remplit son support. Observons pour terminer le fait élémentaire suivant. Nous l'utiliserons pour établir la majoration du théorème 1.1.

Lemme 2.4 *Pour tout borélien Λ vérifiant $\mu(\Lambda) > 0$, on a $\dim_{\mathcal{H}}(\mu) \leq \dim_{\mathcal{H}}(\Lambda)$.*

DÉMONSTRATION : Introduisons l'ensemble

$$Z := \Big\{ z \in X \, , \exists n \in \mathbb{Z} \, , \, f^n(z) \cap \mathcal{J} \neq \emptyset \Big\}$$

où $\mathcal{J}$ a été défini à la section 2.1. Puisque $\mu(\mathcal{J}) = 0$, l'invariance de μ entraîne $\mu(Z) = 0$. L'ensemble invariant $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\Lambda \setminus Z)$ est donc de mesure 1, car μ est ergodique. On en déduit :

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mu) \leq \dim_{\mathcal{H}} \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\Lambda \setminus Z) \Big) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathcal{H}} f^n(\Lambda \setminus Z) = \dim_{\mathcal{H}}(\Lambda \setminus Z) \leq \dim_{\mathcal{H}}(\Lambda)$$

où la première égalité est classique, tandis que la deuxième provient du caractère méromorphe de f. $\square$

3 Branches inverses

L'objectif de cette partie est d'établir la proposition 3.1 qui fournit l'existence et le contrôle des branches inverses des itérés de f le long d'orbites génériques. On trouve des résultats similaires dans les articles de Briend-Duval [BD] et Binder-DeMarco [BdM]. Nous traitons ici le cas méromorphe et nous précisons comment varient les fonctions C, κ et r. On se fixe une fois pour toutes $0 < \epsilon \ll \chi_1$. Le réel ϵ_0 et l'ensemble $\widehat{X}^*$ ont été respectivement introduits aux sections 2.1 et 2.2. On s'autorise aussi à supprimer à $\widehat{X}^*$ des ensembles de $\hat{\mu}$-mesure nulle sans changer de notation.

Proposition 3.1 *Il existe une constante $\rho \geq 1$ indépendante de ϵ et des fonctions mesurables $C, \kappa : \widehat{X}^* \to [1, +\infty[$, $r : \widehat{X}^* \to]0, 1]$ satisfaisant pour tout $\hat{x} \in \widehat{X}^*$:*

(a) *r est $\rho\epsilon$-lente, C et κ sont ϵ-rapides.*

(b) *$f_{\hat{x}}^{-n}$ est définie sur $B_{x_0}(r(\hat{x}))$ pour tout $n \geq 1$.*

(c) *Pour tout $0 < s \leq r(\hat{x})$, on a $B_{x_{-n}}\left(\frac{s}{C(\hat{x})} e^{-n(\chi_k(1+\epsilon_0)+\epsilon)}\right) \subset f_{\hat{x}}^{-n} B_{x_0}(s)$.*

(d) *Pour tout $0 < s \leq r(\hat{x})$, on a $\mathrm{vol}\ f_{\hat{x}}^{-n}(B_{x_0}(s)) \leq \kappa(\hat{x}) \mathrm{vol}\, B_{x_0}(s) . e^{-n(2\Sigma - \epsilon)}$.*

La démonstration repose sur les deux lemmes suivants. Le premier montre que les orbites négatives typiques de f ne s'approchent pas trop vite de l'ensemble analytique $\mathcal{J}$ défini à la section 2.1 :

Lemme 3.2 *Il existe une fonction ϵ-lente $A_1 : \widehat{X}^* \to]0, 1]$ telle que :*

$$\forall\, \hat{x} \in \widehat{X}^* \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ \mathrm{dist}\ (x_{-n}, \mathcal{J}) \geq 2A_1(\hat{x}) e^{-n\epsilon}.$$

Démonstration : La fonction $u(x) := \log \mathrm{dist}\,(x, \mathcal{J})$ est μ-intégrable, d'après la section 2.1. On invoque alors le lemme 2.3-(b). On supprime ici à l'ensemble $\widehat{X}^*$ un ensemble de mesure $\widehat{\mu}$ nulle. $\square$

Le deuxième lemme est un résultat d'inversion locale quantitative. Pour tout $\hat{x} \in \widehat{X}^*$, on pose :

$$\mathcal{V}_n(\hat{x}) := \left\{ z \in X\ , \ \mathrm{dist}\,(z, \mathcal{J}) \geq A_1(\hat{x}) e^{-n\epsilon} \right\}.$$

On introduit également (cf section 2.1) :

$$M_n(\hat{x}) := 1 + \|\, df \,\|_{\mathcal{V}_{n+1}(\hat{x})} + \left\|\, d^2 f \,\right\|_{\mathcal{V}_{n+1}(\hat{x})} + \left\|\, df^{-1} \,\right\|_{\mathcal{V}_{n+1}(\hat{x})} + \left\|\, d^2 f^{-1} \,\right\|_{\mathcal{V}_{n+1}(\hat{x})}.$$

Le lemme 2.1 appliqué à f et f^{-1} avec $\mathcal{A} := \mathcal{I}$ ou $\mathcal{J}'$ fournit des constantes $c, c' \geq 1$ et $\rho' \geq 1$ indépendantes de ϵ vérifiant :

$$\forall\, \hat{x} \in \widehat{X}^* \ , \ \exists\, z \in \mathcal{V}_{n+1}(\hat{x}) \ , \ M_n(\hat{x})^{2k+1} \leq c' \mathrm{dist}(z, \mathcal{J})^{-\rho'} \leq c \left(A_1(\hat{x}) e^{-(n+1)\epsilon} \right)^{-\rho'}.$$

Pour tout $\hat{x} \in \widehat{X}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, notons :

$$\alpha_n(\hat{x}) := \min \left\{ 1 \, , \, \| \, df(x_{-n-1}) \, \| \, , \, \left\| \, df(x_{-n-1})^{-1} \, \right\| \, , \, \mathrm{Jac}\, f(x_{-n-1}) \right\} .$$

On pose alors :

$$r_n(\hat{x}) := \frac{\alpha_n(\hat{x}) A_1(\hat{x}) e^{-(n+1)\epsilon}}{C M_n(\hat{x})^{2k+1}}$$

où C est une constante vérifiant $C > \max\{e^{\epsilon/2}, (1-e^{-\epsilon/2})^{-1}\}$. Le théorème d'inversion locale "précisé" est le suivant.

Lemme 3.3 *Soit $B_n := B_{x_{-n}}(r_n(\hat{x}))$. Alors, pour tout $n \geq 0$,*

(a) *f possède une branche inverse g sur B_n vérifiant $g(x_{-n}) = x_{-n-1}$.*

(b) $\mathrm{Lip}\,(g_{|B_n}) \leq \| \, df(x_{-n-1})^{-1} \, \| \, e^{\epsilon/2}$.

(c) $\mathrm{Lip}\,(f_{|g(B_n)}) \leq \| \, df(x_{-n-1}) \, \| \, e^{\epsilon/2}$.

(d) $\inf \left\{ \mathrm{Jac}\, f(y), y \in g(B_n) \right\} \geq \mathrm{Jac}\, f(x_{-n-1}) e^{-\epsilon/2}$.

(e) *Il existe une fonction $\eta : \widehat{X}^* \to]0,1]$, qui est $3\rho'\epsilon$-lente, et telle que*

$$\forall n \geq 0 \ , \ r_n(\hat{x}) \geq e^{-3n\rho'\epsilon} \eta(\hat{x}).$$

DÉMONSTRATION :
(a) On a $B_n \subset \mathcal{V}_n(\hat{x}) \subset X \setminus \mathcal{J}$ car $r_n(\hat{x}) \leq A_1(\hat{x}) e^{-n\epsilon} \leq d(x_{-n}, \mathcal{J})/2$ (cf lemme 3.2). On termine en rappelant que $\mathcal{J}$ contient les valeurs critiques de f.
(b) Par définition de $M_n(\hat{x})$ et de $r_n(\hat{x})$, on obtient en utilisant l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Lip}\,(g_{|B_n}) & \leq & \sup \{ \| \, dg(y) \, \| \, , \, y \in B_n \} \\ & \leq & \left\| \, df(x_{-n-1})^{-1} \, \right\| + r_n(\hat{x}) M_n(\hat{x}) \\ & \leq & \left\| \, df(x_{-n-1})^{-1} \, \right\| + \left\| \, df(x_{-n-1})^{-1} \, \right\| / C \\ & \leq & \left\| \, df(x_{-n-1})^{-1} \, \right\| e^{\epsilon/2} \end{array}$$

car $C^{-1} \leq 1 - e^{-\epsilon/2} \leq e^{\epsilon/2} - 1$.
(c) D'après (b) , $g(B_n)$ est contenu dans la boule centrée en x_{-n-1} et de rayon :

$$r'_n(\hat{x}) := r_n(\hat{x}) \left\| \, df(x_{-n-1})^{-1} \, \right\| e^{\epsilon/2} \leq r_n(\hat{x}) M_n(\hat{x}) e^{\epsilon/2}.$$

Elle est en particulier contenue dans $\mathcal{V}_{n+1}(\hat{x})$. En effet, on a :

$$r_n(\hat{x}) M_n(\hat{x}) e^{\epsilon/2} \leq A_1(\hat{x}) e^{-(n+1)\epsilon} e^{\epsilon/2} / C \leq A_1(\hat{x}) e^{-(n+1)\epsilon} \leq d(x_{-n-1}, \mathcal{J})/2.$$

On en déduit comme précédemment :

$$\begin{aligned}\mathrm{Lip}(f_{|g(B_n)}) &\leq \| df(x_{-n-1}) \| + r'_n(\hat{x}) M_n(\hat{x}) \\ &\leq \| df(x_{-n-1}) \| + r_n(\hat{x}) M_n^2(\hat{x}) e^{\epsilon/2} \\ &\leq \| df(x_{-n-1}) \| + \| df(x_{-n-1}) \| / C \\ &\leq \| df(x_{-n-1}) \| e^{\epsilon/2}.\end{aligned}$$

(d) On a dans ce cas : (d) On a dans ce cas :

$$\begin{aligned}\inf \Big\{ \mathrm{Jac} f(y), y \in g(B_n) \Big\} &\geq \mathrm{Jac} f(x_{-n-1}) - r'_n(\hat{x}) M_n(\hat{x})^{2k} \\ &\geq \mathrm{Jac} f(x_{-n-1}) - r_n(\hat{x}) M_n(\hat{x})^{2k+1} e^{\epsilon/2} \\ &\geq \mathrm{Jac} f(x_{-n-1}) - \mathrm{Jac} f(x_{-n-1})/C \\ &\geq \mathrm{Jac} f(x_{-n-1}) e^{-\epsilon/2}.\end{aligned}$$

(e) Puisque les fonctions *quasi-psh* sont μ-intégrables, il en est de même pour

$$z \mapsto \log \left(\min \left\{ 1 \, , \, \| df(z) \| \, , \, \left\| df(z)^{-1} \right\| \, , \, \mathrm{Jac}\, f(z) \right\} \right) .$$

Ainsi, d'après le lemme 2.3(b), il existe une fonction ϵ-lente $A_2 : \widehat{X} \to]0,1]$ vérifiant

$$\forall \, \hat{x} \ \hat{\mu}\text{-p.p.} \ , \ \forall n \geq 0 \ , \ \alpha_n(\hat{x}) \geq A_2(\hat{x}) e^{-n\epsilon}.$$

A l'aide de la ligne (3), on vérifie facilement que l'on a (avec $\rho' \geq 1$) :

$$\forall \, \hat{x} \ \hat{\mu}\text{-p.p.} \ , \ \forall n \geq 0 \ , \ r_n(\hat{x}) \geq e^{-3n\rho'\epsilon} \left((Cc)^{-1} e^{-\epsilon} A_1(\hat{x})^{2\rho'} A_2(\hat{x})^{\rho'} \right) .$$

On prend alors pour η la fonction entre les parenthèses : elle est bien $3\rho'\epsilon$-lente car A_1 et A_2 sont ϵ-lentes. □

Démonstration de la proposition 3.1 : Les notations sont celles du lemme 3.3. Posons

$$\forall n \geq 1 \ , \ \tilde{B}_n := \left\{ f^{n-1}(z) \, , \, z \in B_{n-1} \, , \, f(z) \in B_{n-2} \, , \, \ldots \, , \, f^{n-1}(z) \in B_0 \right\} \subset B_0.$$

D'après le lemme 2.3, le lemme 3.3, et les inégalités des lignes (6) et (7) (cf section 2.1), il existe des fonctions ϵ-rapides $C_1, C_2 : \widehat{X}^* \to [1, +\infty[$ et une fonction ϵ-lente $C_3 : \widehat{X}^* \to]0,1]$ vérifiant :

(1) Pour tout $n \geq 1$, $g_n := f_{\hat{x}}^{-n}$ existe sur $\tilde{B}_n$.

(2) $\mathrm{Lip}\, (g_{n\,|\tilde{B}_n}) \leq \prod_{i=1}^n \| df(x_{-i})^{-1} \| e^{n\epsilon/2} \leq C_1(\hat{x}) e^{n(-\chi_1(1-\epsilon_0)+\epsilon)}$.

(3) $\mathrm{Lip}\, \left(f^n_{|g_n(\tilde{B}_n)} \right) \leq \prod_{i=1}^n \| df(x_{-i}) \| e^{n\epsilon/2} \leq C_2(\hat{x}) e^{n(\chi_k(1+\epsilon_0)+\epsilon)}$.

(4) $\inf\left\{\mathrm{Jac}\, f^n(y), y\in g_n(\tilde{B}_n)\right\} \geq \mathrm{Jac}\, f^n(x_{-n})e^{-n\epsilon/2} \geq C_3(\hat{x})e^{n(2\Sigma-\epsilon)}$.

Pour le dernier point, rappelons que l'on a $\mathrm{Jac}\, f^n(x_{-n}) = \prod_{i=1}^n \mathrm{Jac}\, f(x_{-i})$ et $\int_X \log \mathrm{Jac}\,(f)d\mu = 2\Sigma$ (cf section 2.1). Posons $C := \max\{C_1, C_2\}$ et $r := \eta/C$, où η a été introduite au lemme 3.3. Ces fonctions sont respectivement ϵ-rapide et $\rho\epsilon$-lente, avec $\rho := 3\rho' + 1$. Pour montrer (b), on vérifie l'inclusion $B(x_0, r(\hat{x})) \subset \tilde{B}_n$ par récurrence, en utilisant (2) avec $\epsilon \ll \chi_1$. L'assertion (c) découle de (3). Enfin, le point (d) provient du théorème de changement de variables avec $\kappa := C_3^{-1}$. □

4 Démonstration du théorème 1.1

4.1 Minoration

Étant donné $\epsilon > 0$, prenons les fonctions à variation lente r, C définies par la proposition 3.1. La fonction $\zeta := r/C$ est donc $(\rho+1)\epsilon$-lente, et il existe une fonction $\sigma : \widehat{X}^* \to]0,1]$ vérifiant :

$$\forall n \geq 1 \ , \ \zeta(\hat{f}^n(\hat{x})) \geq \sigma(\hat{x}).e^{-n(\rho+1)\epsilon}.$$

On obtient ainsi, en posant $\delta_n := e^{-n(\chi_k(1+\epsilon_0)+\epsilon)}.e^{-n(\rho+1)\epsilon}$:

$$\forall\, \hat{x}\ \hat{\mu}\text{-p.p.} \ , \ \forall n \geq 1 \ , \ B_{x_0}(\sigma(\hat{x}).\delta_n) \subset B_{x_0}(\zeta(\hat{f}^n(\hat{x})).e^{-n(\chi_k(1+\epsilon_0)+\epsilon)}).$$

Puisque f^n est injective sur ces boules (cf proposition 3.1-(c)), et que μ est une mesure de *probabilité* et de *jacobien* d_t (cf section 2.1), cette inclusion implique :

$$\forall\, \hat{x}\ \hat{\mu}\text{-p.p.} \ , \ \forall n \geq 1 \ , \ \mu\left(B_{x_0}(\sigma(\hat{x}).\delta_n)\right) \leq d_t^{-n}$$

ce qui fournit immédiatement :

$$\forall\, \hat{x}\ \hat{\mu}\text{-p.p.} \ , \ \forall n \geq 1 \ , \ \frac{\log \mu\left(B_{x_0}(\sigma(\hat{x}).\delta_n)\right)}{\log(\sigma(\hat{x}).\delta_n)} \geq \frac{\log d_t^{-n}}{\log(\sigma(\hat{x}).\delta_n)}.$$

On en déduit, en prenant la limite inférieure :

$$\forall\, \hat{x}\ \hat{\mu}\text{-p.p.} \ , \ \liminf_{n\to+\infty} \frac{\log \mu\left(B_{x_0}(\sigma(\hat{x}).\delta_n)\right)}{\log(\sigma(\hat{x}).\delta_n)} \geq \frac{\log d_t}{\chi_k(1+\epsilon_0)+(\rho+2)\epsilon}.$$

Il existe donc un borélien Λ de X vérifiant $\mu(\Lambda) = 1$, et $\theta : \Lambda \to]0,1]$ tels que :

$$\forall x \in \Lambda \ , \ \liminf_{n\to+\infty} \frac{\log \mu\left(B_x(\theta(x).\delta_n)\right)}{\log(\theta(x).\delta_n)} \geq \frac{\log d_t}{\chi_k(1+\epsilon_0)+(\rho+2)\epsilon}. \tag{9}$$

Le corollaire 1.3 appliqué à $\rho_n(x) := \theta(x).\delta_n$ entraîne :

$$\dim_{\mathcal{H}}(\mu) \geq \frac{\log d_t}{\chi_k(1+\epsilon_0)+(\rho+2)\epsilon}.$$

On obtient la minoration $\dim_{\mathcal{H}}(\mu) \geq \log d_t/\chi_k$ en faisant tendre ϵ et ϵ_0 vers zéro.

4.2 Majoration

Considérons pour $\epsilon > 0$ fixé les fonctions à variation lente r, C et κ définies à la proposition 3.1. On leur associe des fonctions mesurables $\tilde{r}$, $\tilde{C}$ et $\tilde{\kappa}$ vérifiant les propriétés de la définition 2.2. Fixons aussi $r_0, C_0, \kappa_0 > 0$ pour que le borélien

$$\widehat{A} := \left\{ \hat{x} \in \widehat{X}^* \, , \, \tilde{r}(\hat{x}) \geq r_0 \, , \, \tilde{C}(\hat{x}) \leq C_0 \, , \, \tilde{\kappa}(\hat{x}) \leq \kappa_0 \right\}$$

vérifie $\hat{\mu}(\widehat{A}) > 0$. On note alors $A := \pi_0(\widehat{A})$, et pour tout $n \geq 0$:

$$r_n := r_0 e^{-n\rho\epsilon} \ , \ C_n := C_0 e^{n\epsilon} \ , \ \kappa_n := \kappa_0 e^{n\epsilon} \ , \ \delta_n := (r_n/C_n).e^{-n(\chi_k(1+\epsilon_0)+\epsilon)}.$$

Pour tout $\hat{x} \in \widehat{A}$ et $n \geq 0$, on pose aussi :

$$\hat{x}_n := \hat{f}^n(\hat{x}) \ , \ g_n := f^{-n}_{\hat{x}_n} \ , \ x := \pi_0(\hat{x}) \ , \ x_n := \pi_0(\hat{x}_n) = f^n(x).$$

Le lemme suivant est une conséquence de la proposition 3.1 :

Lemme 4.1 *Pour tout $\hat{x} \in \widehat{A}$, on a :*

(a) *g_n est définie sur $B_{x_n}(r_n)$.*

(b) *Pour tout $s \in]0, r_n]$, $B_x(\frac{s}{r_n}\delta_n) \subset g_n(B_{x_n}(s))$.*

(c) $\mathrm{vol}\, g_n(B_{x_n}(r_n)) \leq c e^{-2n\Sigma}$, *où c est une constante indépendante de n.*

Démonstration : Les deux premiers points s'obtiennent à l'aide de la proposition 3.1-(b),(c), en observant :

$$r(\hat{x}_n) \geq \tilde{r}(\hat{x}) e^{-n\rho\epsilon} \geq r_0 e^{-n\rho\epsilon} = r_n \ \text{ et } \ C(\hat{x}_n) \leq \tilde{C}(\hat{x}) e^{n\epsilon} \leq C_0 e^{n\epsilon} = C_n.$$

Pour le dernier point, la proposition 3.1-(d) et l'inégalité $\kappa(\hat{x}_n) \leq \kappa_0 e^{n\epsilon}$ entraînent :

$$\mathrm{vol}\, g_n(B_{x_n}(r_n)) \leq \kappa_0 e^{n\epsilon} \mathrm{vol}\,(B_{x_n}(r_n)) e^{-n(2\Sigma - \epsilon)} \leq c e^{-2n\Sigma}$$

avec c une constante assez grande. On utilise ici l'inégalité $\mathrm{vol}(B_{x_n}(r_n)) \leq e^{-2n\epsilon}$ valable à une constante multiplicative près. $\square$

Nous obtenons la majoration en montrant l'inégalité :

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) \ \leq \ \alpha_\epsilon \ := \ 2k - \frac{2\Sigma - \log d_t - 2k\rho\epsilon}{\chi_k(1+\epsilon_0) + (\rho+2)\epsilon}. \tag{10}$$

En effet, si celle-ci est vérifiée, le lemme 2.4 entraîne $\dim_{\mathcal{H}}(\mu) \leq \alpha_\epsilon$ et on termine en faisant tendre ϵ_0 et ϵ vers zéro. On s'attache à présent à la preuve de (10). Étant donné $\delta > 0$, fixons $n \geq 0$ pour que $2\delta_n < \delta$ et choisissons E_n, un sous-ensemble fini de A, vérifiant :

(i) les boules de la famille $\{B_x(\delta_n/4), x \in E_n\}$ sont disjointes deux à deux.

(ii) A est recouvert par la réunion $\bigcup_{x\in E_n} B_x(\delta_n)$.

On a alors par définition de la fonction d'ensemble $\Lambda_{\alpha,\delta}$ (cf section 2.4) :

$$\Lambda_{\alpha_\epsilon,\delta}(A) \leq \#E_n.(2\delta_n)^{\alpha_\epsilon}. \tag{11}$$

Nous montrons maintenant l'estimation (10) en vérifiant que le membre de droite de (11) est borné par une constante indépendante de δ. Nous évaluons $\#E_n$ à l'aide du résultat suivant :

Lemme 4.2 *Il existe une famille d'ouverts $\mathcal{P}_n$ de cardinal au plus $\sigma r_n^{-2k} d_t^n$, où σ est une constante indépendante de n, vérifiant :*

(a) $\forall P \in \mathcal{P}_n$, $\mathrm{vol}\,(P) \leq ce^{-2n\Sigma}$.

(b) $\forall x \in E_n$, $B_x(\delta_n/4) \subset \bigcup_{P\in\mathcal{P}_n} P$.

Supposons ce résultat acquis, et terminons la démonstration du théorème. Si Γ_n désigne le volume d'une boule de rayon $\delta_n/4$, le lemme 4.2 et (i) entraînent :

$$\#E_n \leq \frac{1}{\Gamma_n} \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \mathrm{vol}\,(P) \leq \frac{1}{\Gamma_n} \sigma r_n^{-2k} d_t^n.ce^{-2n\Sigma}. \tag{12}$$

En utilisant (ii) et les lignes (11) et (12), on obtient les inégalités suivantes (à des constantes multiplicatives près indépendantes de n) :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_{\alpha_\epsilon,\delta}(A) & \lesssim & \#E_n.\delta_n^{\alpha_\epsilon} \\ & \lesssim & \delta_n^{\alpha_\epsilon-2k} r_n^{-2k} e^{-n(2\Sigma-\log d_t)} \\ & \lesssim & \left(\dfrac{r_n}{C_n}\right)^{\alpha_\epsilon-2k} e^{-n(\chi_k(1+\epsilon_0)+\epsilon)(\alpha_\epsilon-2k)} r_n^{-2k} e^{-n(2\Sigma-\log d_t)} \\ & \lesssim & e^{n[\epsilon(\rho+1)+(\chi_k(1+\epsilon_0)+\epsilon)]\left(\frac{2\Sigma-\log d_t-2k\rho\epsilon}{\chi_k(1+\epsilon_0)+(\rho+2)\epsilon}\right)} e^{2kn\rho\epsilon} e^{-n(2\Sigma-\log d_t)} = 1. \end{array}$$

Ainsi, $\Lambda_{\alpha_\epsilon,\delta}(A)$ est majoré par une constante indépendante de δ. La quantité $\Lambda_{\alpha_\epsilon}(A)$ est donc finie, ce qui entraîne (10). □

Démonstration du lemme 4.2 : Soient $n \geq 0$ et $\mathcal{B}$ une famille finie de boules recouvrant X de rayon $r_n/4$ de cardinal majoré par σr_n^{-2k}, où σ est une constante indépendante de n. Reprenons les notations et les résultats du lemme 4.1. Soient $x \in A$ et $B \in \mathcal{B}$ tels que $f^n(x) \in B$. Si $2B$ désigne la boule concentrique à B et de rayon double, on a clairement :

$$B_{x_n}(r_n/4) \subset 2B \subset B_{x_n}(r_n). \tag{13}$$

Posons $P_x := g_n(2B)$. L'inclusion de droite dans (13) et le lemme 4.1-(a) montrent que l'ouvert P_x est bien défini et qu'il est contenu dans $g_n(B_{x_n}(r_n))$. Le lemme 4.1-(c) entraîne :

$$\mathrm{vol}\,(P_x) \leq ce^{-2n\Sigma}.$$

Si $x \in E_n$, l'inclusion de gauche dans (13) et le lemme 4.1-(b) avec $s = r_n/4$ impliquent :

$$B_x(\delta_n/4) \subset g_n(B_{x_n}(r_n/4)) \subset P_x.$$

La famille $\mathcal{P}_n := \{g_n(2B)\,,\, B \in \mathcal{B}\}$ répond au problème posé. Son cardinal est bien majoré par $\sigma r_n^{-2k} d_t^n$ (f^n est de degré topologique d_t^n) et les applications g_n sont des branches inverses de f^n sur les boules de $\mathcal{B}$. $\square$

References

[BDu] F. Berteloot, C. Dupont, *Une caractérisation des exemples de Lattès de $\mathbb{P}^k$ par leur mesure de Green*, à paraître dans *Comment. Math. Helv.*

[BM] F. Berteloot, V. Mayer, Rudiments de dynamique holomorphe, Cours Spécialisés, **7***, SMF et EDP Sciences, 2001.*

[BdM] I. Binder, L. DeMarco, Dimension of pluriharmonic measure and polynomial endomorphisms of $\mathbf{C}^n$*,* Int. Math. Res. Not., **11** (2003), 613-625.

[B] J.Y. Briend, *Exposants de Liapounoff et points périodiques d'endomorphismes holomorphes de $\mathbb{CP}^k$,* Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, 1997.

[BD] J.Y. Briend, J. Duval, *Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbb{CP}^k$,* Acta Math., **182** (1999), no. 2, 143-157.

[CFS] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, Ya. B. Sinaï, *Ergodic Theory,* Grund. Math. Wiss., No **245**, Springer, 1985.

[DS1] T.C. Dinh, N. Sibony, *Dynamique des applications d'allure polynomiale,* J. Math. Pures Appl., (9) **82** (2003), no. 4, 367-423.

[DS2] T.C. Dinh, N. Sibony, *Distributions des valeurs de transformations méromorphes et applications,* arxiv.org/abs/math.DS/0306095 (2003).

[DS3] T.C. Dinh, N. Sibony, *Regularization of currents and entropy,* à paraître dans Ann. Sci. École Norm. Sup.

[D] C. Dupont, *Formule de Pesin et applications méromorphes*, Prépublication, 2004.

[F] K. Falconer, *Techniques in fractal geometry,* Wiley, 1997

[G] V. Guedj, *Ergodic properties of rational mappings with large topological degree,* à paraître dans Ann. of Math.

[H] H. Hironaka, *Desingularization of complex analytic varieties,* Actes Congrès intern. Math., Tome 2 (1970), 627-631.

[KH] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems,* Cambridge Univ. Press, 1995.

[L] F. Ledrappier, *Quelques propriétés ergodiques des applications rationnelles,* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **299** (1984), no. 1, 37-40.

[Lo] S. Lojasiewicz, *Introduction to complex analytic geometry,* Birkhäuser, 1991.

[M] R. Mañé, *The Hausdorff dimension of invariant probabilities of rational maps,* Lecture Notes in Math., **1331**, Springer, 1988.

[P] Y. B. Pesin, *Dimension theory in dynamical systems,* Chicago Lectures in Math. Series, 1997.

[R] D. Ruelle, *Ergodic theory of differentiable dynamical systems,* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **50** (1979), 27-58.

[RS] A. Russakovskii, B. Shiffman, *Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics,* Ind. Univ. Math. J., **46** (1997), 897-932.

[S] N. Sibony, *Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$,* in Dynamique et Géométrie Complexes, Panoramas et Synthèses No **8**, SMF et EDP Sciences, 1999.

[Y] L.S. Young, *Dimension, entropy and Lyapounov exponents,* Ergodic Theory & Dynamical Systems, **2** (1982), no. 1, 109-124.

Tien-Cuong Dinh et Christophe Dupont
Bât. 425, Mathématique, UMR 8628
Université Paris-Sud
91405 Orsay Cedex, France.

TienCuong.Dinh@math.u-psud.fr
Christophe.Dupont@math.u-psud.fr