Université Paris-Sud
Faculté des Sciences d'Orsay

Mémoire

présenté pour obtenir le

Diplôme d'Habilitation à Diriger des Recherches

en science de l'Université Paris XI

Spécialité : Mathématiques

par

Christophe Dupont

ASPECTS GÉOMÉTRIQUES ET STOCHASTIQUES EN DYNAMIQUE HOLOMORPHE SUR $\mathbb{CP}^k$

Soutenu le 29 Novembre 2010 devant la commission d'examen :

M. François Berteloot
M. Jérôme Buzzi
M. Tien-Cong Dinh
M. Julien Duval
M. François Ledrappier
M. Mark Pollicott

Remerciements

Je tiens à remercier Tien-Cuong Dinh et Mark Pollicott pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire, et Julien Duval pour l'avoir présenté au conseil scientifique de l'Université. J'ai beaucoup appris grâce à eux et suis très honoré de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

François Berteloot a suivi la progression de mes recherches depuis la thèse, Jérôme Buzzi et François Ledrappier m'ont généreusement accordé du temps pour des discussions éclairantes. C'est avec grand plaisir que je les en remercie et que je soutiens aujourd'hui en leur présence.

J'ai eu également la chance de bénéficier des conseils de Nessim Sibony. Je le remercie vivement pour sa disponibilité et pour la richesse de la vie scientifique qu'il développe autour de nous.

J'exprime toute ma gratitude au laboratoire de Mathématiques d'Orsay, à l'équipe d'Analyse Harmonique et à l'ANR Dynacomplexe pour les excellentes conditions de travail de ces dernières années.

Je remercie Céline, ma famille et mes amis pour leur soutien chaleureux. Je dédie enfin ce travail à la mémoire de mon père.

Introduction

Ce mémoire concerne la dynamique des endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k$. Ces applications sont de la forme $f = [P_0 : \ldots : P_k]$, où $(P_i)_{0\leq i\leq k}$ est une collection de polynômes homogènes de même degré $d \geq 2$ sans zéro commun. Ce sont des revêtements ramifiés de $\mathbb{P}^k$: leur ensemble critique est une hypersurface algébrique non triviale et le cardinal d'une fibre de f, compté avec multiplicités, est égal à d^k.

Nous étudions les propriétés géométriques et stochastiques de la mesure d'équilibre $\mu = T^k$, où T désigne le courant de Green de f. Pour ce faire, nous avons développé une notion de formes normales pour les branches inverses et mis au point une technique de codage sur l'arbre des préimages d'un point. Notre travail étudie également les mesures dilatantes et les mesures de grande entropie. Commençons par rappeler certaines propriétés avant de donner plus de détails.

L'entropie topologique d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ est égale à $h_{top} = \log d^k$: la minoration utilise la régularité C^1 [MP], la majoration repose sur l'holomorphie [Gr]. Les propriétés dynamiques de f sont liées à la géométrie de $\mathbb{P}^k$. Si ω désigne la forme de Fubini-Study normalisée, alors la suite de $(1,1)$ formes $\frac{1}{d^n} f^{n*}\omega$ converge au sens des distributions vers un $(1,1)$ courant T positif fermé. Celui-ci vérifie l'identité $f^*T = dT$, est cohomologue à ω, et possède des potentiels plurisousharmoniques continus [FS], [HP].

Le produit $\mu = T \wedge \ldots \wedge T$ (k fois) définit alors une mesure de probabilité, appelée mesure d'équilibre. Celle-ci vérifie l'identité $f^*\mu = d^k\mu$ et, par définition, équidistribue la mesure de Lebesgue : $\mu = \lim_n \frac{1}{d^{kn}} f^{n*}\omega^k$. Elle satisfait la propriété plus forte d'équidistribution des points : si δ_z désigne la masse de Dirac en z, alors $\frac{1}{d^{kn}} f^{n*}\delta_z$ converge vers μ pour tout $z \in \mathbb{P}^k$ en dehors d'un ensemble algébrique $\mathcal{E}$ [BD2], [DS2].

La relation $f^*\mu = d^k\mu$ stipule que le jacobien de μ est constant : cela entraîne son *invariance* et la maximalité de son entropie ($h_\mu = \log d^k$). C'est en fait l'unique mesure qui maximise l'entropie [BD2]. La mesure μ est de plus mélangeante [FS] et ses exposants de Lyapunov sont plus grands que $\log \sqrt{d}$ [BD1]. Nous les noterons par la suite $\lambda_k \leq \ldots \leq \lambda_1$.

On consultera les exposés [Sib] et [DS7] pour plus de précisions concernant la dynamique de ces endomorphismes. Nous décrivons maintenant les travaux présentés. Nous dirons qu'une mesure ergodique ν est *dilatante* si ses exposants de Lyapunov sont strictement positifs et qu'elle est *de grande entropie* si $h_\nu > \log d^{k-1}$.

Le *chapitre 1* est consacré à l'étude des endomorphismes extrémaux. Nous montrons dans une première partie que si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors f provient d'une dilatation affine sur un tore complexe : f est un endomorphisme de Lattès. Cette caractérisation repose sur un procédé de renormalisation des branches inverses par leurs différentielles, établi sous la condition $\lambda_1 < 2\lambda_k$. Cette condition est ici vérifiée car les exposants sont égaux à $\log \sqrt{d}$ lorsque μ est absolument continue.

Nous montrons ensuite que la minimalité des exposants entraîne l'absolue continuité de μ. Nous proposons deux preuves différentes. La première est valable pour toute mesure dilatante vérifiant la formule de Pesin. La deuxième est adaptée à μ : elle repose sur le Théorème Central Limite appliqué à l'observable $\log \mathrm{Jac} f$ (voir chapitre 3) et sur l'identité de conformité $f^*\mu = d^k\mu$.

Dans le *chapitre 2* nous montrons un théorème de formes normales (du type Poincaré-Dulac) pour des composées d'applications holomorphes contractantes. Ce résultat généralise le procédé du chapitre précédent. Il s'applique aux branches inverses de f^n le long des orbites négatives d'une mesure ν dilatante, il devient un théorème de linéarisation lorsque les exposants de ν ne présentent pas de résonnance.

On obtient ainsi un substitut au théorème de distorsion de Koebe en dimension supérieure. Nous en déduisons que la moyenne de la fonction $\log \mathrm{Jac} f$ sur les n-cycles répulsifs converge vers la somme des exposants de μ. Une telle formule est centrale pour l'étude des bifurcations d'une famille d'endomorphismes.

Le *chapitre 3* est consacré au codage des systèmes $(\mathbb{P}^k, f, \mu)$. Notons (Σ, s, P) l'espace de Bernoulli à d^k symboles muni du décalage à gauche. Nous montrons qu'il existe des applications $\omega : \Sigma \to \mathbb{P}^k$ définies P-presque partout vérifiant $f \circ \omega = \omega \circ s$, $\omega_*\mathsf{P} = \mu$, ainsi que de bonnes propriétés de régularité. La preuve repose sur une propriété de convergence exponentielle en moyenne des préimages d'un point vers μ.

Comme application, nous prouvons le Principe d'Invariance Presque Sûr pour $(\mathbb{P}^k, f, \mu)$. Nos observables ψ sont les fonctions Hölder et les fonctions à singularités logarithmiques. Ce principe affirme que les sommes de Birkhoff de ψ suivent les trajectoires d'un mouvement Brownien. Il entraîne, par exemple, le Théorème Central Limite, la Loi du Logarithme Itéré ainsi que d'autres propriétés stochastiques.

Le *chapitre 4* concerne les mesures de grande entropie. Nous montrons que les exposants d'une telle mesure sont minorés par $\frac{1}{2}(h_\nu - \log d^{k-1})$, une mesure de grande entropie est donc dilatante. Nous construisons ensuite des mesures de grande entropie à l'aide de la méthode de codage du chapitre 3. Les applications ω sont en effet définies presque partout pour des mesures ergodiques proches de P, nous montrons ainsi la convergence de probabilités non uniformes sur les fibres de f^n vers des mesures mélangeantes. La régularité des codages ω permet d'établir qu'ils préservent l'entropie, quitte à bien choisir le point z de départ.

Le *chapitre 5* est consacré à l'étude de la dimension de Hausdorff du support borélien des mesures dilatantes. Lorsque $k = 1$, on dispose de la formule de Mañé $\dim_{\mathcal{H}} \nu = h_\nu/\lambda$, qui repose sur le caractère conforme des fractions rationnelles. Nous montrons en dimension supérieure des estimations faisant intervenir l'entropie et les exposants de ν. Nous obtenons tout d'abord une majoration, basée sur des estimations du volume des branches inverses : cette inégalité permet de caractériser les endomorphismes de Lattès par la maximalité de la dimension de μ. Nous montrons ensuite la minoration $\dim_{\mathcal{H}} \mu \geq \log d/\lambda_1 + \log d/\lambda_2$, premier pas vers une généralisation de la formule de Mañé sur $\mathbb{P}^2$. La preuve consiste à décrire la répartition des branches inverses dans l'espace projectif, on utilise à cet effet le théorème de normalisation du chapitre 3.

Le *chapitre 6* contient finalement quelques questions et problèmes ouverts.

Table des matières

Outils et notations

On note ω la forme de Fubini-Study normalisée sur $\mathbb{P}^k$ et Leb la mesure de Lebesgue induite par la forme volume ω^k. Soit $\mathrm{Jac}\, f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{R}^+$ le jacobien de f relativement à ω : c'est la fonction lisse vérifiant $f^*\omega^k = \mathrm{Jac}\, f \cdot \omega^k$. On note $\mathcal{C} := \{\mathrm{Jac}\, f = 0\}$ l'ensemble critique de f, c'est une hypersurface de degré $(k+1)(d-1)$ compté avec multiplicités. Soient $B_z(r)$ les boules de $\mathbb{P}^k$, et $B(r)$ celles de $\mathbb{C}^k$ centrées en l'origine.

On consultera les livres [KH], [Po] et [Wa] pour une introduction à la théorie ergodique et aux exposants de Lyapunov. Soit ν une mesure f-invariante et ergodique. On note h_ν son entropie et $\lambda_k \leq \ldots \leq \lambda_1$ ses exposants de Lyapunov. Ceux-ci appartiennent à $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et vérifient

$$\int_{\mathbb{P}^k} \log \mathrm{Jac}\, f \, d\nu = 2(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k).$$

Le coefficient 2 provient du fait que les exposants réels de ν apparaissent par paires. Cette formule montre que $\log \mathrm{Jac}\, f \in L^1(\nu)$ si et seulement si les exposants de ν sont finis. On a dans ce cas $\nu(\mathcal{C}) = 0$. Ces propriétés sont en particulier vérifiées pour toute mesure dilatante, i.e. dont les exposants sont strictement positifs.

Soit O l'espace des orbites $\{\hat{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \ , \ f(x_n) = x_{n+1}\}$. C'est un fermé de $(\mathbb{P}^k)^{\mathbb{Z}}$ sur lequel f induit le décalage à gauche $\hat{f}$. Soit $\pi : \mathsf{O} \to \mathbb{P}^k$ la projection $\pi(\hat{x}) = x_0$. Pour toute mesure f-invariante ν sur $\mathbb{P}^k$, on note $\hat{\nu}$ l'unique mesure $\hat{f}$-invariante sur O vérifiant $\pi_*\hat{\nu} = \nu$. Les propriétés d'ergodicité et de mélange passent à $\hat{\nu}$. On note $f_{\hat{x}}^{-n}$ (resp. $f_{\hat{x}_n}^{-n}$) la branche inverse de f^n qui envoie x_0 sur x_{-n} (resp. x_n sur x_0).

Soit $X := \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \ , \ x_n \notin \mathcal{C}\}$. La proposition suivante montre que, pour toute mesure dilatante ν, les branches inverses de f^n le long des éléments ν-génériques de X sont bien définies. On consultera [BD1] et [DD] pour une démonstration. Une fonction $r : \mathsf{O} \to]0,1]$ est dite *lente* si $e^{-\epsilon} \leq r(\hat{f}(\hat{x}))/r(\hat{x}) \leq e^{\epsilon}$.

Proposition 1 : *Soit ν une mesure dilatante. Alors il existe une fonction lente $r : \mathsf{O} \to]0,1]$ telle que pour $\hat{\nu}$-presque tout $\hat{x} \in \mathsf{O}$ et $n \geq n(\hat{x})$:*

1. *$f_{\hat{x}}^{-n}$ est définie sur $B_{x_0}(r(\hat{x}))$.*
2. *$B_{x_{-n}}(r(\hat{x})e^{-n(\lambda_1+\epsilon)}) \subset f_{\hat{x}}^{-n}[B_{x_0}(r(\hat{x}))] \subset B_{x_{-n}}(r(\hat{x})e^{-n(\lambda_k-\epsilon)})$.*
3. *$\mathsf{Leb}\, f_{\hat{x}}^{-n}[B_{x_0}(r(\hat{x}))] \simeq r(\hat{x})^{2k} e^{-2n(\lambda_1+\ldots+\lambda_k)\pm n\epsilon}$.*

La démonstration utilise l'hypothèse de stricte positivité des exposants à deux reprises : elle fournit la contraction exponentielle des branches inverses, et l'approche lente des orbites négatives vers $\mathcal{C}$. On applique pour le dernier point le théorème ergodique de Birkhoff à la fonction $\log \operatorname{Jac} f \in L^1(\nu)$.

La propriété de régularité suivante de μ sera cruciale (voir [DS5]).

Proposition 2 : *Soit A un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}^k$ et $A[r]$ son r-voisinage tubulaire. Alors il existe $c, \gamma > 0$ tels que $\mu(A[r]) \leq c\, r^\gamma$.*

La preuve repose sur l'identité $\mu = T^k$ et sur le fait que T possède des potentiels höldériens. Cette proposition permet de montrer $\log \operatorname{Jac} f \in L^1(\mu)$. Notons que l'on peut obtenir directement $\int_{\mathbb{P}^k} \log \operatorname{Jac} f \geq \log d^k$ en utilisant $\mu = \lim_n \frac{1}{d^{kn}} f^{n*}\omega^k$ [DS2].

Dans la suite du texte, la constante c pourra changer d'une ligne à l'autre. Pour simplifier l'exposé du chapitre 5, nous n'écrirons pas toujours les termes d'erreur $e^{\pm n\epsilon}$ provenant de la dynamique non uniformément hyperbolique.

Chapitre 1

Endomorphismes extrémaux

Un endomorphisme de Lattès est une application holomorphe f de $\mathbb{P}^k$ faisant commuter un diagramme du type suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\sigma"'] & A \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathbb{P}^k \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^k \end{tikzcd}$$

où A est un tore complexe de dimension k, D une application affine et σ un quotient par un groupe fini d'automorphismes. La partie linéaire de D est alors de la forme $\sqrt{d}\,U$, où d est le degré de f et U une isométrie. De tels endomorphismes existent en toute dimension k et pour tout degré d. Lorsque $k = 1$, la fonction de Weierstrass $\wp : A \to \mathbb{P}^1$ fournit un exemple d'application σ (c'est le quotient par $\{\pm \mathrm{Id}\}$), et la fraction rationnelle vérifiant $f \circ \wp = \wp \circ 2\,\mathrm{Id}$ est de Lattès [La]. Ces endomorphismes apparaissent dans de nombreux problèmes de rigidité (voir [DS1], [May], [M], [Z]) et dans l'étude des bifurcations (voir le chapitre 6 pour plus de détails).

Nous décrivons dans l'article [D1] le bord de leur bassin d'attraction dans $\mathbb{C}^{k+1}$: celui-ci est sphérique en dehors d'un nombre fini de cercles. Nous donnons également dans ce travail des exemples d'applications de Lattès en dimension 2.

Il est facile de voir que la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de Lattès est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue m, et que ses exposants de Lyapunov sont égaux à $\log \sqrt{d}$. L'objet de ce chapitre est d'établir les réciproques.

Théorème : *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *f est un endomorphisme de Lattès.*
2. *La mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*
3. *Les exposants de μ sont minimaux, égaux à $\log \sqrt{d}$.*

Ainsi, pour un endomorphisme générique, μ est singulière par rapport à m et l'un au moins de ses exposants est plus grand que $\log \sqrt{d}$. Nous verrons au chapitre 5 que les endomorphismes de Lattès sont aussi caractérisés par la maximalité de la dimension de Hausdorff de μ.

1.1 Caractérisation des endomorphismes de Lattès

Les résultats de cette partie sont issus de [BeD].

Théorème A : *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$. Si sa mesure d'équilibre est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors f est de Lattès.*

La preuve repose sur plusieurs outils. Le premier est une caractérisation des endomorphismes de Lattès en terme de la régularité du courant de Green [BL2].

Théorème (Berteloot-Loeb) : *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$. Si son courant de Green T est lisse et strictement positif sur un ouvert Ω, alors f est de Lattès.*

La preuve est de nature algébrique. Soit $p \in \Omega$ un point n-périodique répulsif : un tel point existe car $\mu(\Omega) > 0$ et μ équidistribue les cycles répulsifs [BD1]. Puisque T est équivalent à la forme hermitienne standard sur Ω, l'identité $f^*T = dT$ s'évalue en p et fournit $D := d_p f = \sqrt{d}\, U$. Ainsi, d'après le théorème de linéarisation de Poincaré, il existe un biholomorphisme $\tilde{\sigma} : (\mathbb{C}^k, 0) \to (\mathbb{P}^k, p)$ tel que $\tilde{\sigma} \circ D = f \circ \tilde{\sigma}$. Cette identité se propage en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^k \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathbb{C}^k \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathbb{P}^k \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^k \end{tikzcd}$$

en posant $\sigma := f^n \circ D^{-n}$ sur $D^n(\mathbb{C}^k, 0)$ (ces ouverts forment une exhaustion de $\mathbb{C}^k$). La suite de la démonstration consiste à décrire l'application σ. Pour ce faire, Berteloot-Loeb montrent que le relevé de T par σ est égal à la forme standard sur $\mathbb{C}^k$. Il s'ensuit que les fibres de σ coïncident avec les orbites d'un groupe d'isométries co-compact et discret. L'endomorphisme f est ainsi de Lattès.

Nous obtenons le théorème A en montrant que l'absolue continuité de $\mu = T^k$ entraîne la régularité T. Le contexte dynamique est ici crucial. Notre premier outil est le procédé de renormalisation suivant. Nous généraliserons ce résultat au cas d'exposants quelconques au chapitre 2. Soient $\lambda_k \leq \cdots \leq \lambda_1$ les exposants de μ.

Théorème 1 : *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$. Si les exposants de μ vérifient $\lambda_1 < 2\lambda_k$, alors pour μ-presque tout $z \in \mathbb{P}^k$ il existe $\rho(z) > 0$ tel que*

1. *les applications $\varphi_n := f^n\left(z + (d_z f^n)^{-1}\right)$ sont injectives sur $B(\rho(z))$,*
2. *la suite $(\varphi_n)_n$ possède des limites injectives sur $B(\rho(z))$.*

On montre ensuite que si μ est absolument continue, alors $(d_z f^n)^{-1}$ s'identifie à une homothétie de rapport $d^{-n/2}$ (à des constantes multiplicatives près, sans erreur exponentielle). Nous y parvenons en montrant que le diamètre et le volume de $(d_z f^n)^{-1}$ sont respectivement équivalents à $d^{-n/2}$ et d^{-kn}.

Le résultat suivant contrôle le diamètre, il est valable pour tout endomorphisme, sans hypothèse sur la régularité de μ.

Théorème 2 : *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ et μ sa mesure d'équilibre. Posons pour tout $\rho, \tau > 0$ (la fonction $\rho(z)$ a été introduite au théorème 1) :*

$$\mathcal{R}_n(\rho,\tau) := \left\{ z \in \mathbb{P}^k \, , \, \rho(z) \geq \rho \;\; \textit{et} \; |(d_z f^n)^{-1}|^{-1} \leq \tau \cdot d^{n/2} \right\} .$$

Alors $\mu(\mathcal{R}_n(\rho,\tau)) \leq \tau^2/\rho^2$ à une constante multiplicative près.

La preuve repose sur un lemme de pluripotentiel dû à Briend-Duval [BD1]. On commence par construire pour μ-presque tout $z \in \mathbb{P}^k$ un disque holomorphe de diamètre $|(d_z f^n)^{-1}|^{-1}$ sur lequel le potentiel de T diffère d'une fonction harmonique d'au plus d^{-n} : cela s'obtient à l'aide du théorème 1 et de la relation $f^{n*}T = d^n T$. Le lemme de Briend-Duval stipule alors que la masse de Monge-Ampère $\mu = T^k$ charge peu l'ensemble des points z où la taille du disque est petite. Une application de ce lemme fournit précisément la majoration en τ^2/ρ^2.

Le contrôle du volume de $d_z f^n$ nécessite l'absolue continuité de μ.

Théorème 3 : *Supposons que la mesure d'équilibre μ soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors il existe $V \subset \mathbb{P}^k$ satisfaisant $\mu(V) > 0$ et : pour tout $z \in V$, il existe une suite $(n_j(z))_j$ telle que*

$$\mathrm{Jac}\, f^{n_j}(z) \simeq d^{kn_j} \;\; \textit{à des constantes multiplicative près.}$$

La preuve utilise la relation $f^{n*}\mu = d^{kn}\mu$ exprimée sur la densité de μ (théorème de Lusin) et le mélange de μ. Cela termine le contrôle du diamètre et du volume. Observons que le théorème 3 entraîne l'implication $2 \Rightarrow 3$:

Corollaire : *Si la mesure d'équilibre μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors ses exposants sont égaux à $\log \sqrt{d}$.*

On dispose en effet de la formule $\lim_n \frac{1}{n} \log \mathrm{Jac}\, f^n(z) = 2 \sum_{j=1}^k \lambda_j$ vérifiée μ-p.p., et de la minoration des exposants par $\log \sqrt{d}$.

Preuve du théorème A

Les théorèmes 1, 2 et 3 fournissent le principe de renormalisation suivant.

Théorème B : *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ et μ sa mesure d'équilibre. Supposons que μ soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors, il existe $V \subset \mathbb{P}^k$ vérifiant $\mu(V) > 0$ et : pour tout $z \in V$, il existe $\rho(z) > 0$ et $(n_j(z))_j$ tels que*

$$\varphi_{n_j} : \begin{array}{ccc} B(\rho(z)) & \longrightarrow & \mathbb{P}^k \\ u & \longmapsto & f^{n_j}(z + d^{-n_j/2}u) \end{array}$$

est injective et converge uniformément vers une application holomorphe injective.

Nous obtenons alors le théorème A de la manière suivante. Considérons la décomposition de Lebesgue $T_a + T_s$ du courant T. Ces courants sont positifs et vérifient l'identité $f^*S = dS$. Le théorème B permet de renormaliser T_a : il coïncide sur un ouvert Ω avec une forme hermitienne positive à coefficients constants, notée H. Les courants H et $T_s = T - H$ sont donc fermés à potentiels continus sur Ω. On peut donc reconstituer μ sur Ω :

$$\mu = (H + T_s)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \; T_s^j \wedge H^{k-j}. \tag{1.1}$$

Il suffit pour conclure de montrer que H n'est pas dégénérée : cela entraîne $T_s = 0$ par unicité de la décomposition de Lebesgue de μ dans (1.1), ainsi T est lisse et défini positif sur Ω. Supposons donc que H soit dégénérée. Il découle de (1.1) que μ charge le support du courant singulier T_s. Un nouvel argument de renormalisation montre alors que T_s possède une partie absolument continue, ce qui n'est pas possible.

1.2 Formule de Pesin

Nous montrons l'implication $3 \Rightarrow 2$ du théorème de l'introduction.

Théorème C : *Soient f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ et μ sa mesure d'équilibre. Si les exposants de μ sont égaux à $\log \sqrt{d}$, alors μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Nous proposons deux démonstrations. La première est valable pour toute mesure dilatante vérifiant la formule de Pesin, nous reprenons ici les arguments de Pesin [Pe1] et Ledrappier [Le1], [Le2]. La deuxième est propre à μ, elle repose sur le Théorème Central Limite et sur la relation $f^*\mu = d^k\mu$.

Première démonstration du théorème C

Nous montrons l'énoncé général suivant [D2]. On rappelle qu'une mesure ergodique est dilatante si ses exposants $\lambda_k \leq \ldots \leq \lambda_1$ sont strictement positifs.

Théorème D : *Soient f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ et ν une mesure dilatante. Si $h_\nu = 2\sum_{j=1}^{k} \lambda_j$, alors ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

La preuve nécessite la construction d'une partition η de l'espace des orbites O. On note $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}(\hat{f}^{-n}\eta)$) la σ-algèbre engendrée par les $\hat{\nu}$-négligeables et les boréliens de O (resp. par les $\hat{\nu}$-négligeables et les boréliens réunion d'atomes de $\hat{f}^{-n}\eta$). On note $\eta_{\hat{x}}$ l'atome de η contenant $\hat{x}$ et $\pi : \mathsf{O} \mapsto \mathbb{P}^k$ la projection au temps 0.

Proposition : *Il existe une partition mesurable η de O vérifiant les propriétés suivantes. Pour $\hat{\nu}$-presque tout $\hat{x}$ et $n \geq 1$:*

1. *π est injective sur $\eta_{\hat{x}}$.*

2. *f^n est injective sur $\pi\left(\hat f^{-n}\eta\right)_{\hat x}$.*
3. *$\eta_{\hat x}$ est réunion dénombrable d'atomes de $\hat f^{-n}\eta$.*
4. *$h_{\hat\nu}(\hat f^n) = H(\hat f^{-n}\eta \mid \eta)$.*
5. *La σ-algèbre engendrée par $(\mathcal{M}(\hat f^{-n}\eta))_{n\geq 0}$ coïncide avec $\mathcal{M}$.*
6. *Soit $\Delta(\hat x, .) : \eta_{\hat x} \to \mathbb{R}^+$ la fonction*

$$\Delta(\hat x, \hat y) := \prod_{p\geq 1} \frac{\mathrm{Jac}\, f(x_{-p})}{\mathrm{Jac}\, f(y_{-p})}$$

et soit $\sigma_{\hat x}$ l'inverse de $\pi : \eta_{\hat x} \to \mathbb{P}^k$. Alors la fonction

$$L(\hat x) := \int_{\pi(\eta_{\hat x})} \Delta(\hat x, \sigma_{\hat x}(y))\, d\mathsf{Leb}(y)$$

vérifie $0 < L(\hat x) < +\infty$ pour $\hat\nu$-presque tout $\hat x \in \mathsf{O}$.

On obtient η comme le joint d'une famille de partitions $(\hat f^n\xi)_{n\geq 0}$, où ξ est une union de variétés instables locales intersectée avec le π-relevé d'une partition de $\mathbb{P}^k$ sur laquelle f est injective. Les points 4 et 5 proviennent du caractère générateur de ξ, les points 3 et 6 du fait que les atomes de η contiennent des morceaux de variétés instables. La stricte positivité des exposants de ν assure la convergence de Δ.

Voyons maintenant comment cette proposition entraîne le théorème D. Considérons $(\hat\nu_{\hat x})_{\hat x\in\mathsf{O}}$ une famille de probabilités conditionnelles pour la partition η, et $q_{\hat x}$ la mesure de probabilité sur O définie par :

$$\forall B \in \mathcal{M}\ ,\ q_{\hat x}(B) := \frac{1}{L(\hat x)} \int_{\pi(B\cap\eta_{\hat x})} \Delta(\hat x, \sigma_{\hat x}(y))\, d\mathsf{Leb}(y).$$

Il s'agit dans un premier temps d'identifier les mesures $\nu_{\hat x}$ et $q_{\hat x}$. Par définition de l'entropie conditionnelle, le point 4 de la proposition s'écrit :

$$h_{\hat\nu}(\hat f^n) = H(\hat f^{-n}\eta \mid \eta) = -\int_{\mathsf{O}} \log \hat\nu_{\hat x}\left[\left(\hat f^{-n}\eta\right)_{\hat x}\right] d\hat\nu.$$

Par ailleurs, le caractère décroissant de η et la formule de changement de variable entraînent :

$$\int_{\mathsf{O}} \log \mathrm{Jac}\, f^n(x_0)\, d\hat\nu = -\int_{\mathsf{O}} \log q_{\hat x}\left[\left(\hat f^{-n}\eta\right)_{\hat x}\right] d\hat\nu.$$

On identifie toutes ces quantités à l'aide de l'hypothèse du théorème D (la formule de Pesin), qui s'écrit :

$$h_{\hat\nu}(\hat f^n) = \int_{\mathsf{O}} \log \mathrm{Jac}\, f^n(x_0)\, d\hat\nu.$$

On montre ainsi que les *moyennes* des fonctions $\log \nu_{\hat{x}}\left[\left(\hat{f}^{-n}\eta\right)_{\hat{x}}\right]$ et $\log q_{\hat{x}}\left[\left(\hat{f}^{-n}\eta\right)_{\hat{x}}\right]$ coïncident. L'égalité *ponctuelle* découle de l'inégalité de Jensen (cas d'égalité) :

$$\forall \hat{x} \in \mathsf{O}\ \hat{\nu}\text{-p.p.}\,,\ \forall n \geq 0\,,\ q_{\hat{x}}\left[\left(\hat{f}^{-n}\eta\right)_{\hat{x}}\right] = \hat{\nu}_{\hat{x}}\left[\left(\hat{f}^{-n}\eta\right)_{\hat{x}}\right].$$

Puisque la σ-algèbre engendrée par $(\mathcal{M}(\hat{f}^{-n}\eta))_{n\geq 0}$ coïncide avec $\mathcal{M}$ (point 5), la ligne précédente entraîne $q_{\hat{x}} = \hat{\nu}_{\hat{x}}$. On a donc $\hat{\nu} = \int_{\mathsf{O}} q_{\hat{x}}\, d\hat{\nu}$. La mesure $\nu = \pi_*\hat{\nu}$ est donc absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Notons que le théorème D s'étend aux applications méromorphes de variétés kählériennes compactes. On demande dans ce cas à la mesure ν d'intégrer le logarithme de la fonction distance à un ensemble analytique (qui est localement *psh*), de sorte que les orbites typiques s'approchent lentement de l'ensemble d'indétermination.

Deuxième démonstration du théorème C

L'idée consiste ici à contrôler directement la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à la mesure de Lebesgue [D3]. Nous appliquons pour cela le Théorème Central Limite à l'observable $\log \operatorname{Jac} f$ (cf chapitre 3) et utilisons l'identité $f^*\mu = d^k\mu$, i.e. $\mu(f(B)) = d^k\mu(B)$ pour tout borélien B sur lequel f est injective. Notons $J := \log \operatorname{Jac} f - \log d^k$ et $\sigma_J := \lim_n \frac{1}{\sqrt{n}}|S_n(J)|_2$ sa variance asymptotique.

Théorème E : *Si les exposants de μ sont égaux à $\log\sqrt{d}$, alors $\sigma_J = 0$.*

Nous donnons la démonstration à la fin de la section. Nous commençons par expliquer comment le théorème C se déduit du théorème E. On montre tout d'abord l'analogue suivant du théorème 3.

Théorème 3' : *Supposons que les exposants de μ soient égaux à $\log\sqrt{d}$. Alors il existe $V \subset \mathbb{P}^k$ tel que $\mu(V) > 0$ et : pour tout $z \in V$ il existe $(n_j(z))_j$ tel que*

$$\operatorname{Jac} f^{n_j}(z) \simeq d^{kn_j} \ \text{à des constantes multiplicatives près.} \tag{1.2}$$

En effet, la variance de J étant nulle d'après le théorème E, il existe $u \in L^2(\mu)$ tel que $J = u - u \circ f$. L'additivité de la fonction $\log \operatorname{Jac} f$ entraîne alors :

$$u - u \circ f^n(z) = \sum_{i=0}^{n-1} J \circ f^i(z) = \log \operatorname{Jac} f^n(z) - \log d^{kn}.$$

On déduit alors (1.2) du caractère mélangeant de μ : l'orbite d'un point générique revient une infinité de fois dans tout borélien du type $\{|u| \leq M\}$. Cela prouve le théorème 3'.

Il s'ensuit la version suivante du théorème B :

Théorème B' : *Supposons que les exposants de μ soient égaux à $\log\sqrt{d}$. Alors, il existe $V \subset \mathbb{P}^k$ vérifiant $\mu(V) > 0$ et : pour tout $z \in V$, il existe $\rho(z) > 0$ et $(n_j(z))_j$ tels que*

$$\varphi_{n_j} : \begin{array}{ccc} B(\rho(z)) & \longrightarrow & \mathbb{P}^k \\ u & \longmapsto & f^{n_j}(z + d^{-n_j/2}u) \end{array}$$

est injective et converge uniformément vers une application holomorphe injective.

Voyons maintenant comment le théorème B' permet de contrôler la dérivée de μ en tout point de V (cela montre donc le théorème C). Soient $z \in V$ et $B_j := B_z(\rho(z)d^{-n_j/2})$. Par définition de la mesure de Lebesgue, et puisque f^{n_j} est injective sur B_j, on dispose respectivement des formules

$$\mathsf{Leb}(B_j) = \rho(z)^{2k}\left(d^{-n_j/2}\right)^{2k} \quad \text{et} \quad \mu(B_j) = \mu(f^{n_j}(B_j))d^{-kn_j}.$$

Elles entraînent les inégalités

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\mu(B_z(r))}{\mathsf{Leb}(B_z(r))} \leq \liminf_{j\to\infty} \frac{\mu(B_j)}{\mathsf{Leb}(B_j)} = \liminf_{j\to\infty} \frac{\mu(f^{n_j}(B_j))}{\rho(z)^{2k}} \leq \frac{1}{\rho(z)^{2k}} < +\infty,$$

cela montre le théorème C.

Esquissons pour terminer la preuve du théorème E. Supposons que les exposants de μ soient égaux à $\log\sqrt{d}$ et que $\sigma_J > 0$. Nous allons obtenir une contradiction en utilisant la symétrie de la loi gaussienne et le contrôle de la dilatation minimale de f^n le long des orbites μ-génériques (théorème 2). D'après le Théorème Central Limite, le borélien

$$\mathcal{G}_n := \left\{ \frac{1}{\sigma_J\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{n-1} J \circ f^i \leq -1 \right\}$$

vérifie $\mu(\mathcal{G}_n) \geq \alpha$ pour n assez grand. Il existe donc $A \subset \mathbb{P}^k$ tel que $\mu(A) \geq \alpha$ et

$$\forall z \in A\ ,\ \exists (n_j(z))_j\ ,\ z \in \mathcal{G}_{n_j} = \left\{ \operatorname{Jac} f^{n_j}(z) \leq d^{kn_j} e^{-\sigma_J\sqrt{n_j}} \right\}. \tag{1.3}$$

Maintenant, le théorème 2 stipule que la μ-mesure de

$$\mathcal{R}_n(\rho,\tau) = \left\{ z \in \mathbb{P}^k\ ,\ \rho(z) \geq \rho \ \text{ et } |(d_z f^n)^{-1}|^{-1} \leq \tau \cdot d^{n/2} \right\}$$

est plus petite que τ^2/ρ^2. Une application du lemme de Borel-Cantelli à $\mathcal{R}_n(\rho, \frac{1}{n})$ fournit alors (pour ρ assez petit et quitte à diminuer A) :

$$\forall z \in A\ \mu\text{-p.p.}\ ,\ \forall n \geq n(z)\ ,\ \operatorname{Jac} f^n(z) \geq d^{kn}/n^{2k}. \tag{1.4}$$

La comparaison de (1.3) et (1.4) fournit la contradiction recherchée.

Chapitre 2

Formes normales

Rappelons le théorème de normalisation d'une contraction holomorphe.

Théorème (Poincaré-Dulac) : *Soit $G : (\mathbb{C}^k, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ une application holomorphe. Supposons que $A := d_0 G$ soit triangulaire contractante. Alors il existe un changement de coordonnées holomorphe φ et une application polynomiale triangulaire résonnante N tels que $\varphi\, G\, \varphi^{-1} = A + N$.*

Les résonnances concernent les valeurs propres de A, qui sont des nombres complexes. Ce théorème permet de construire des domaines stricts de $\mathbb{C}^k$ biholomorphes à $\mathbb{C}^k$ (domaines de Fatou-Bieberbach). En effet, lorsque G provient d'un automorphisme de $\mathbb{C}^k$, l'application φ se prolonge en un automorphisme du bassin d'attraction de l'origine de G sur le bassin d'attraction de l'origine de $A + N$ [RR].

Nous obtenons dans [BDM] un théorème de formes normales pour des *suites* de contractions holomorphes. Des résultats similaires ont été établis en classe C^∞ [KS], [GK] et dans le contexte holomorphe [JV]. Notre démonstration repose sur un argument de renormalisation. Cette approche simplifie la preuve de [JV] et répond à une de leurs questions. Elle fournit également une nouvelle preuve du théorème de Poincaré-Dulac.

La normalisation s'applique aux branches inverses d'un endomorphisme le long des orbites négatives d'une mesure dilatante. Les résonnances concernent ici les exposants de Lyapunov, qui sont des réels strictement positifs. En employant le théorème de normalisation comme un théorème de distorsion, nous montrons que la moyenne de $\log \mathrm{Jac}\, f$ sur les n-cycles répulsifs converge vers la somme des exposants de μ. Nous verrons une autre application au chapitre 5 pour la dimension de Hausdorff des mesures dilatantes.

L'étude des suites de contractions est aussi motivée par la question suivante.

Conjecture (Fornaess-Stensones) : *Soient $a \leq b < 0$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite d'automorphismes de $\mathbb{C}^k$ vérifiant $e^a|z| \leq |g_n(z)| \leq e^b|z|$ sur $B(1) \subset \mathbb{C}^k$. Alors le bassin d'attraction de $(g_n)_{n\geq 1}$ est biholomorphe à $\mathbb{C}^k$.*

Cette conjecture a été démontrée lorsque $2b < a$ [Wo] et lorsque $(g_n)_n$ est proche d'un automorphisme g fixé [Pet]. Dans le contexte dynamique de [JV] et [BDM], le théorème d'Oseledec-Pesin permet de supposer que $d_0 g_n$ est diagonale par blocs, et que les valeurs singulières de chaque bloc présentent le même taux de croissance exponentiel. Le travail [Sa] donne une extension au cas triangulaire par un argument de perturbation. Notons qu'une réponse positive à la conjecture résoud le problème suivant [FSt].

Conjecture (Bedford) : *Soit $g : X \to X$ un automorphisme holomorphe d'une variété complexe. Supposons que g soit hyperbolique sur un compact invariant K. Alors, pour tout $x \in K$, la variété stable passant par x est biholomorphe à un espace euclidien complexe $\mathbb{C}^k$.*

L'article [JV] montre cette conjecture pour des points génériques relativement à des mesures invariantes sur K.

2.1 Définitions et résonnances

Fixons $\epsilon > 0$. Une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est *lente* si elle vérifie $e^{-\epsilon} r_n \leq r_{n+1} \leq e^{\epsilon} r_n$. Nous étudions les suites d'applications :

$$\mathcal{S} := \{\, (g_n)_{n\in\mathbb{Z}}\,,\ g_n : \mathbb{D}^k(r_n) \to \mathbb{D}^k(r_{n+1}) \text{ holomorphe },\ g_n(0) = 0 \text{ et } (r_n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ lente } \}.$$

Les coefficients du développement de Taylor de g_n varient donc lentement pour une suite de $\mathcal{S}$. Nous utiliserons les suites de changements de coordonnées :

$$\mathcal{T} := \{\, (\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}\,,\ \varphi_n \text{ holomorphe injective},\ \varphi_n(0) = 0 \text{ et } d_0\varphi_n = \mathrm{Id}\,\}.$$

Soit maintenant $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$. Nous dirons que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}} := (d_0 g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est *régulière* s'il existe une décomposition $\mathbb{C}^k = \oplus_{j=1}^{l} E_j$, où $E_j := \{0\} \times \ldots \times \mathbb{C}^{k_j} \times \ldots \times \{0\}$, et des réels $\Lambda_l < \ldots < \Lambda_1$ strictement positifs tels que

$$A_n(E_j) = E_j \quad \text{et} \quad e^{-\Lambda_j - \epsilon}|v| \leq |A_n(v)| \leq e^{-\Lambda_j + \epsilon}|v| \quad \text{pour tout } v \in E_j.$$

Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq k}$ la suite définie par les $(\Lambda_j)_{1\leq j\leq l}$ en répétant k_j fois Λ_j. L'ensemble des indices j-résonnants est alors défini par :

$$\mathfrak{R}_j := \{\alpha \in \mathbb{N}^k\ ,\ |\alpha| \geq 2 \ \text{ et } \ \alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_k = \Lambda_j\}.$$

Notons qu'un tel indice vérifie $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k_1+\ldots+k_j} = 0$ et $2 \leq |\alpha| \leq [\Lambda_1/\Lambda_l]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x.

On définit à présent la partie résonnante d'une application $g : (\mathbb{C}^k, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$. Si $\left(\sum_{|\alpha|\geq 1} c_\alpha^1 z^\alpha\,, \ldots,\, \sum_{|\alpha|\geq 1} c_\alpha^l z^\alpha\right)$ désigne le développement de Taylor de g relativement à $\oplus_{j=1}^{l} E_j$ (de sorte que $c_\alpha^j \in \mathbb{C}^{k_j}$), on pose :

$$\mathfrak{R}(g) := \left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_1} c_\alpha^1 z^\alpha\,, \ldots,\, \sum_{\alpha\in\mathfrak{R}_{l-1}} c_\alpha^{l-1} z^\alpha\,,\, 0 \right).$$

C'est une application polynomiale de degré $\leq [\Lambda_1/\Lambda_l]$, sans terme linéaire. Notons que la composée de deux applications résonnantes est résonnante (voir par exemple [GK], [BDM]), le degré reste en particulier borné par itération. Cette propriété classique est fondamentale pour les applications (voir par exemple la section 2.3.2).

2.2 Théorème de normalisation

L'énoncé est le suivant.

Théorème A : *Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$ telle que $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit régulière. Alors il existe une suite lente $(\rho_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{T}$ telles que le diagramme suivant commute, où $h_n = A_n + \mathfrak{R}(g_n)$:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "g_{n-1}"] & \mathbb{D}^k(\rho_n) \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "U_n"'] & \mathbb{D}^k(\rho_{n+1}) \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "U_{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "h_{n-1}"] & \mathbb{D}^k(2\rho_n) \arrow[r, "h_n"] & \mathbb{D}^k(2\rho_{n+1}) \arrow[r, "h_{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La démonstration va se faire en deux étapes (théorèmes 1 et 2).

Etape 1 : résolution des équations homologiques

Cette partie est empruntée à l'article de Jonsson-Varolin [JV].

Théorème 1 : *Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$ telle que $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit régulière. Alors il existe une suite lente $(\rho_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{T}$ telles que le diagramme suivant commute, où $h_n = A_n + \mathfrak{R}(g_n) + O([\Lambda_1/\Lambda_l] + 1)$:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "g_{n-1}"] & \mathbb{D}^k(\rho_n) \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "V_n"'] & \mathbb{D}^k(\rho_{n+1}) \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "V_{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "h_{n-1}"] & \mathbb{D}^k(2\rho_n) \arrow[r, "h_n"] & \mathbb{D}^k(2\rho_{n+1}) \arrow[r, "h_{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La preuve consiste à supprimer par changement de coordonnées successifs les indices résonnants de degré $p \in \{2, \ldots, [\Lambda_1/\Lambda_l]\}$ dans la partie p-homogène de g_n. Il s'agit d'étudier la surjectivité de l'opérateur

$$(H_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (H_{n+1} \circ A_n - A_n \circ H_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

sur les suites d'applications p-homogènes. Cela fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition : *Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$ telle que $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit régulière, et soit $p \geq 2$.*

1. *Il existe une suite $(H_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'applications p-homogènes telle que*

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , \quad g_n^{(p)} + H_{n+1} \circ A_n - A_n \circ H_n = \mathfrak{R}(g_n^{(p)}).$$

2. *Si $S_n := \mathrm{Id} + H_n$, alors il existe une suite lente $(\tau_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "g_{n-1}"] & \mathbb{D}^k(\tau_n) \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "S_n"'] & \mathbb{D}^k(\tau_{n+1}) \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "S_{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "h_{n-1}"] & \mathbb{D}^k(2\tau_n) \arrow[r, "h_n"] & \mathbb{D}^k(2\tau_{n+1}) \arrow[r, "h_{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où $h_n = A_n + g_n^{(2)} + \ldots + g_n^{(p-1)} + \mathfrak{R}(g_n^{(p)}) + O(p+1)$.

Cette proposition stipule donc que l'on peut remplacer $g_n^{(p)}$ par $\mathfrak{R}(g_n^{(p)})$ dans le développement de Taylor de h_n. Nous donnons maintenant l'idée de la preuve. Pour simplifier on suppose que $k_j = 1$ (donc $i = j$ et $l = k$) et on traite le cas $g_n^{(p)} = (0, \ldots, a_n z^\alpha, \ldots, 0)$, où $\alpha \notin \mathfrak{R}_i$.

- Si $\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_k > \lambda_i$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , \quad H_n := A_n^{-1} g_n^{(p)} + \sum_{r\geq 1} A_n^{-1} \ldots A_{n+r}^{-1} \; g_{n+r}^{(p)} \; A_{n+r-1} \ldots A_n. \tag{2.1}$$

Un calcul formel montre que l'on a :

$$g_n^{(p)} + H_{n+1} \circ A_n - A_n \circ H_n = 0 = \mathfrak{R}(g^{(p)}).$$

La convergence de H_n résulte de la régularité de $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. En effet, en écrivant (2.1) sous la forme $H_n = P_{n,0} + \sum_{r\geq 1} P_{n,r}$, on obtient pour $r \geq 1$:

$$\begin{array}{rcl}
|P_{n,r}(z)| & \leq & |A_n^{-1} \;\ldots\; A_{n+r}^{-1} \; g_{n+r}^{(p)} \; \big(e^{-r\lambda_1 + r\epsilon} \, z_1 \, , \; \ldots \; , \; e^{-r\lambda_k + r\epsilon} \, z_k\big)\,| \\
& \leq & |A_n^{-1} \;\ldots\; A_{n+r}^{-1} \; \big(0 \, , \; \ldots \; , \; a_{n+r} \, e^{-r(\,\alpha_1\lambda_1 \,+\, \ldots \,+\, \alpha_k\lambda_k\,) + |\alpha| r\epsilon} \, z^\alpha \, , \; \ldots \; , \; 0\big)\,| \\
& \leq & e^{r\lambda_i + r\epsilon} \, e^{-r(\,\alpha_1\lambda_1 \,+\, \ldots \,+\, \alpha_k\lambda_k\,) + |\alpha| r\epsilon} \, |a_{n+r}| \, |z^\alpha|.
\end{array}$$

La série $\sum_{r\geq 1} P_{n,r}$ est donc convergente, car $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ varie lentement.

- Si $\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_k < \lambda_i$, on procède comme précédemment en posant

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , \quad H_n := -g_{n-1}^{(p)} A_n^{-1} - \sum_{r\geq 1} A_{n-1} \ldots A_{n-r} \; g_{n-(r+1)}^{(p)} \; A_{n-r}^{-1} \ldots A_n^{-1},$$

Le point 1 de la proposition s'ensuit.

La preuve du point 2 consiste à vérifier que $S_n := \mathrm{Id} + H_n$ satisfait $S_n^{-1} = \mathrm{Id} - H_n + O(p+1)$ et

$$S_{n+1}^{-1} \circ g_n \circ S_n = \big(A_n + g_n^{(2)} + \ldots + g_n^{(p-1)}\big) + \big(g_n^{(p)} + H_{n+1} \circ A_n - A_n \circ H_n\big) + O(p+1).$$

La seconde parenthèse étant égale à $\mathfrak{R}(g_n^{(p)})$, cela termine la preuve de la proposition.

Observons que l'application polynomiale $g_n^{(p)}$ ne présente pas de terme résonnant lorsque $p \geq [\Lambda_1/\Lambda_l] + 1$. Ainsi, une application répétée de la proposition précédente permet d'obtenir un ordre de tangence arbitrairement grand dans le théorème 1 entre g_n et sa forme normale. Jonsson-Varolin [JV] obtiennent ainsi le théorème A en montrant que la composée $S_n^{(p)} \circ \ldots \circ S_n^{(1)}$ converge lorsque p tend vers l'infini. Les arguments que nous présentons maintenant simplifient cette approche.

Etape 2 : ordre de contact et conjugaison

On montre que deux éléments de $\mathcal{S}$ sont conjugués dès que leur ordre de contact est suffisamment grand. On ne suppose plus ici que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est régulière.

Théorème 2 : *Soient $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux éléments de $\mathcal{S}$. On suppose qu'il existe $q \geq 1$ et $0 < m, M < 1$ tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:*

$$g_n = h_n + O(q+1) \quad , \quad m|v| \leq |A_n(v)| \leq M|v| \quad \textit{et} \quad M^{q+1} < m.$$

Alors il existe une suite lente $(\rho_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{T}$ telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "g_{n-1}"] & \mathbb{D}^k(\rho_n) \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "T_n"'] & \mathbb{D}^k(\rho_{n+1}) \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "T_{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "h_{n-1}"] & \mathbb{D}^k(2\rho_n) \arrow[r, "h_n"] & \mathbb{D}^k(2\rho_{n+1}) \arrow[r, "h_{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La preuve est proche de celle de la linéarisation des germes contractants de $(\mathbb{C}, 0)$, elle repose sur le caractère analytique des applications. Posons

$$\forall p \geq 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{Z} \ , \ H_{p,n} := h_{n+p} \circ \ldots \circ h_n \quad , \quad G_{p,n} := g_{n+p} \circ \ldots \circ g_n$$

et $H_{-1,n} = G_{-1,n} = \mathrm{Id}$. Nous allons montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application

$$T_n := \lim_{p\to+\infty} H_{p,n}^{-1} \circ G_{p,n}$$

existe (on voit facilement qu'elle répond au problème posé). Considérons l'assertion suivante, où $\beta := M^{q+1}/m < 1$:

$$\mathcal{P}(p) \ : \ \forall n \in \mathbb{Z} \ , \ |(H_{p,n}^{-1} \circ G_{p,n} - H_{p-1,n}^{-1} \circ G_{p-1,n})(v)| \leq \beta^p \, |v|^{q+1}.$$

Nous montrons $\mathcal{P}(p)$ par induction sur $p \in \mathbb{N}$. L'idée de la preuve est la suivante, les détails nécessitent un contrôle précis du défaut de linéarité de g_n et h_n, obtenu à l'aide des inégalités de Cauchy. L'assertion $\mathcal{P}(0)$ est bien satisfaite : l'ordre de tangence $g_n = h_n + O(q+1)$ montre en effet que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ , \ |(h_n^{-1} \circ g_n - \mathrm{Id})(v)| \simeq |h_n^{-1} \circ (g_n - h_n)(v)| \leq |v|^{q+1}.$$

On montre maintenant que $\mathcal{P}(p)$ implique $\mathcal{P}(p+1)$. Composons tout d'abord $\mathcal{P}(p)$ à droite par g_n (on a remplacé n par $n+1$) :

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ ,\ |(H_{p,n+1}^{-1} \circ G_{p,n+1} - H_{p-1,n+1}^{-1} \circ G_{p-1,n+1})(g_n(v))| \leq \beta^p |g_n(v)|^{q+1}.$$

Il s'ensuit, en utilisant la relation $G_{p,n+1} \circ g_n = G_{p+1,n}$ et le contrôle de l'erreur entre g_n et sa différentielle :

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ ,\ |(H_{p,n+1}^{-1} \circ G_{p+1,n} - H_{p-1,n+1}^{-1} \circ G_{p,n})(v)| \leq \beta^p M^{q+1} |v|^{q+1}.$$

On obtient alors $\mathcal{P}(p+1)$ en "composant" à gauche par h_n^{-1} :

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ ,\ |(H_{p+1,n}^{-1} \circ G_{p+1,n} - H_{p,n}^{-1} \circ G_{p,n})(v)| \leq \beta^p \frac{M^{q+1}}{m} |v|^{q+1} = \beta^{p+1} |v|^{q+1}.$$

Cela termine la preuve du théorème 2.

2.3 Applications dynamiques

2.3.1 Normalisation des branches inverses

Nous expliquons ici comment le théorème A s'applique aux branches inverses d'un endomorphisme le long des orbites négatives d'une mesure dilatante ν. Dans ce contexte, la condition de régularité est assurée par le théorème d'Oseledec-Pesin.

Considérons le borélien $X = \{\hat{x} \in \mathsf{O}\ ,\ x_n \notin \mathcal{C}\}$, il est de $\hat{\nu}$-mesure totale lorsque ν est dilatante. Soit $(\tau_x)_{x \in \mathbb{P}^k}$ une famille de cartes de $\mathbb{P}^k$ vérifiant $\tau_x : (\mathbb{C}^k, 0) \to (\mathbb{P}^k, x)$ et $d_0\tau_x = \mathrm{Id}$. On pose $f_x := \tau_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \tau_x$, et pour tout $\hat{x} \in X$:

$$(g_n)_{n \in \mathbb{Z}} := (f_{x_n}^{-1})_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad (A_n)_{n \in \mathbb{Z}} := (d_0 f_{x_n}^{-1})_{n \in \mathbb{Z}}.$$

D'après le théorème d'Oseledec-Pesin, on peut se ramener à une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ régulière en conjugant par une suite *lente* d'isomorphismes linéaires de $\mathbb{C}^k$. Les coefficients $(\Lambda_j)_j$ (de la définition de régularité) sont alors donnés par les exposants de Lyapunov de ν. Le théorème A fournit le résultat suivant. Pour tout $\hat{x} \in X$ et $n \geq 0$, on pose $N_{-n} := A_{-n} + \mathfrak{R}(g_{-n})$ et $N_{\hat{x}}^n := N_{-n} \circ \ldots \circ N_{-1}$.

Théorème B : *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ et ν une mesure dilatante. Pour $\hat{\nu}$-presque tout $\hat{x} \in \mathsf{O}$, il existe des applications holomorphes injectives $(\varphi_{\hat{x},n})_{n \geq 0}$ et des constantes $r_{\hat{x}}, \rho_{\hat{x}} > 0$ tels que le diagramme suivant commute pour tout $n \geq 1$:*

$$\begin{tikzcd}
B_{x_0}(r_{\hat{x}}) \arrow[r, "f_{\hat{x}}^{-n}"] \arrow[d, "\varphi_{\hat{x},0}"'] & f_{\hat{x}}^{-n}\left[B_{x_0}(r_{\hat{x}})\right] \arrow[d, "\varphi_{\hat{x},n}"] \\
B(\rho_{\hat{x}}) \arrow[r, "N_{\hat{x}}^n"] & N_{\hat{x}}^n\left[B(\rho_{\hat{x}})\right]
\end{tikzcd}$$

Cet énoncé devient un théorème de linéarisation lorsque les exposants de ν ne vérifient aucune relation de résonnance. Nous utilisons le théorème B dans la section suivante. Nous verrons au chapitre 5 une autre application pour l'étude de la dimension du support borélien des mesures dilatantes.

2.3.2 Multiplicateurs et exposants

Le théorème suivant stipule que μ équidistribue les cycles répulsifs [BD1]. En dimension $k = 1$, cette propriété est due à Lyubich [Ly].

Théorème (Briend-Duval) : *Soient f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$, μ sa mesure d'équilibre et $\mathcal{R}_n$ l'ensemble de ses points n-périodiques répulsifs. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{d^{kn}} \sum_{p\in\mathcal{R}_n} \delta_p = \mu.$$

Le théorème B, utilisé comme un théorème de distorsion, nous permet d'obtenir le théorème suivant, où $\lambda_k \leq \ldots \leq \lambda_1$ désignent les exposants de μ. Ce résultat apparaît comme un cas particulier du théorème D énoncé plus bas, concernant les sommes partielles des plus grands exposants.

Théorème C : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{d^{kn}} \sum_{p\in\mathcal{R}_n} \log \mathrm{Jac}\, f(p) = 2(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)$.

Ainsi la convergence des cycles répulsifs vers μ se teste sur la fonction $\log \mathrm{Jac}\, f$, qui n'est pas bornée. Notons aussi que l'ensemble des cycles répulsifs est de μ-mesure nulle. A notre connaissance, le théorème C n'était pas connu en dimension 1 ; dans ce cas la preuve se simplifie avec le théorème de Koebe. Notons que le théorème C est important pour l'étude des bifurcations d'une famille d'endomorphismes [BB1] (voir la fin de ce chapitre ainsi que le chapitre 6).

Soit $\bigwedge^s d_p f^n$ l'action de $d_p f^n$ sur les sous-espaces de $\mathbb{C}^k$ de dimension s.

Théorème D : *Pour tout $1 \leq s \leq k$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{d^{kn}} \sum_{p\in\mathcal{R}_n} \frac{1}{n} \log |\bigwedge^s d_p f^n| = 2(\lambda_1 + \ldots + \lambda_s).$$

La preuve consiste à incorporer le théorème B (normalisation) dans la démonstration de Briend-Duval. Soit x un point μ-générique et $B := B_x(r)$ une petite boule. Puisque μ est mélangeante, on a $\mu(f^{-n}B \cap B) \simeq \mu(B)^2$ pour n assez grand. Soit maintenant $\mathcal{F}_n(B)$ l'ensemble des branches inverses définies sur B à valeurs dans B. En utilisant $f^*\mu = d^k\mu$ et le fait que les branches inverses sont disjointes, le mélange fournit $\mathsf{Card}\ \mathcal{F}_n(B) \cdot \mu(B)/d^{kn} \simeq \mu(B)^2$, c'est à dire :

$$\frac{1}{d^{kn}} \mathsf{Card}\ \mathcal{F}_n(B) \simeq \mu(B).$$

Puisque les exposants de μ sont strictement positifs, chaque élément de $\mathcal{F}_n(B)$ est une contraction de B dans B qui fournit un point fixe répulsif p pour f^n. Il s'ensuit :

$$\frac{1}{d^{kn}} \mathsf{Card}\ \mathcal{R}_n \cap B \geq \mu(B).$$

Ainsi, toute valeur d'adhérence μ' de $\frac{1}{d^{kn}} \sum_{p\in\mathcal{R}_n} \delta_p$ vérifie $\mu' \geq \mu$. On obtient finalement $\mu' = \mu$ par un argument de masse globale : le nombre de points n-périodiques est en effet majoré par d^{kn} (théorème de Bezout).

La preuve du théorème D passe donc par l'étude de $d_p f^n$. A cet effet, on montre à l'aide du théorème B vu comme un théorème de distorsion :

$$\forall p \in f_{\hat{x}}^{-n}(B) \ , \ d_p f^n \simeq d_{x_{-n}} f^n. \tag{2.2}$$

Cette propriété est immédiate lorsque les exposants de μ ne vérifient pas de relation de résonnance, car alors on peut linéariser les branches inverses. Sinon, un lemme basé sur la stabilité des applications résonnantes permet d'établir cette approximation. Maintenant, puisque x est μ-générique, on déduit de (2.2) et de la définition des exposants de Lyapunov :

$$\frac{1}{n} \log |\bigwedge^s d_p f^n| \ \simeq \ 2(\lambda_1 + \ldots + \lambda_s).$$

Cela termine la preuve du théorème D.

Terminons ce chapitre par quelques remarques concernant les bifurcations. Soit $(f_c)_{c\in U}$ une famille d'endomorphismes dépendant holomorphiquement de $c \in U$, où U est un ouvert de $\mathbb{C}^q$. La fonction $c \mapsto (\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)(c)$ est plurisousharmonique et Hölder sur U (voir [DS2], [DS7]), et les sommes partielles $c \mapsto (\lambda_1 + \ldots + \lambda_s)(c)$ sont plurisousharmoniques [Ph].

Différentes notions de stabilité entraînent la pluriharmonicité de la somme des exposants. Cette propriété est vérifiée lorsque, sur un ouvert des paramètres, l'ensemble critique ne rencontre pas le support de μ (voir [DS2], [Ph]) ou lorsque l'ensemble des cycles répulsifs satisfait un mouvement holomorphe [BB1]. Nous exposerons au chapitre 6 une question concernant l'étude des familles d'endomorphismes de $\mathbb{P}^2$.

Pour les applications de Hénon ($k = 2$), l'article [BLS2] établit l'équirépartition des points n-périodiques selles vers la mesure d'équilibre μ, ainsi que l'analogue du théorème C pour l'exposant positif de μ. Cet article montre aussi que la stabilité structurelle implique l'harmonicité de l'exposant positif.

Chapitre 3

Codage et propriétés stochastiques

Soient (X, g, m) un système dynamique ergodique et $\chi \in L^1(m)$. Le théorème de Birkhoff est l'analogue de la *Loi forte des grands nombres* en théorie des Probabilités : si $S_n(\chi)$ désigne $\sum_{j=0}^{n-1} \chi \circ g^j$, alors

$$\forall x \in X \ m\text{-p.p.}\ , \ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} S_n(\chi)(x) = \int_X \chi \, dm.$$

Soit maintenant $\chi \in L^2(m)$ une observable centrée. Nous dirons que χ vérifie le *Théorème Central Limite* (TCL) si $\frac{1}{\sqrt{n}} |S_n(\chi)|_2$ possède une limite $\sigma \in \mathbb{R}^+$ et :

- si $\sigma = 0$, il existe $u \in L^2(m)$ telle que $\chi = u - u \circ g$.

- si $\sigma > 0$, alors les sommes de Birkhoff normalisées par $\sigma\sqrt{n}$ convergent en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\forall t \in \mathbb{R}\ , \ \lim_{n \to \infty} m \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n(\chi) \leq t \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} \, du.$$

Une méthode pour obtenir le TCL consiste à établir la décroissance exponentielle des corrélations et à utiliser le théorème de Gordin. Cette approche passe par l'étude de l'opérateur de Perron-Frobenius. Le TCL fut ainsi établi pour $(\mathbb{P}^k, f, \mu)$ et les observables C^2 [FS], Hölder [DS4] et plurisousharmoniques [DNS]. L'article [CL] démontre la condition de Gordin pour les fonctions Hölder par une approche géométrique (utiliser l'erratum de cet article, ainsi que [DS5] pour le contrôle de la mesure des voisinages tubulaires de $\mathcal{C}$). Signalons que le travail [DNS] contient également un *Théorème de Grandes Déviations*.

L'objet de ce chapitre est d'établir le *Principe d'Invariance Presque Sûr* pour la mesure d'équilibre, on expose ici l'article [D3]. Notre classe d'observables est constituée des fonctions Hölder et des fonctions à singularités logarithmiques. Nous développons à cet effet une méthode de codage, nos résultats étendent ceux de [PUZ] établis en dimension $k = 1$.

Une observable χ satisfait le Principe d'Invariance Presque Sûr s'il existe des variables aléatoires $(\mathcal{S}_n)_n$ et un mouvement brownien $\mathcal{W}$ sur $(\Omega, \mathbb{P})$ tels que :
- $(\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n)$ et $(S_1(\chi), \dots, S_n(\chi))$ ont la même distribution,
- il existe $c > 0$ tel que $\mathcal{S}_n = \mathcal{W}(n) + o(n^{1/2-c})$ $\mathbb{P}$-p.p..

Cette propriété décrit la loi de $(S_1(\chi), \dots, S_n(\chi))$, qui concerne les trajectoires du système dynamique. Notons que la distribution de $\mathcal{W}(n)$ est celle d'une somme de n variables aléatoires indépendantes gaussiennes, et que l'erreur $o(n^{1/2-c})$ dépend du point générique choisi par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$.

Le Principe d'Invariance Presque Sûr implique de nombreuses propriétés stochastiques reliées au mouvement brownien, comme le *Théorème Central Limite* et la *Loi du Logarithme Itéré* :

$$\forall x \in X \ m\text{-p.p. }, \ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2n \log\log n}} S_n(\chi)(x) = 1.$$

Elle entraîne aussi les versions presque-sûres de théorèmes limites classiques [CG]. Notons que le Principe d'Invariance Presque Sûr a été établi pour les difféomorphismes Axiome A [DP] et pour les applications Gibbs-Markov [MN], les démonstrations utilisent l'existence de bonnes partitions séparant les points. Notons que l'article récent [Go] utilise des méthodes spectrales pour montrer cette propriété.

On note $\Sigma := \{1, \dots, d^k\}^{\mathbb{N}}$, s le décalage à gauche et P la mesure produit qui attribue à tout n-cylindre la masse d^{-kn}. Nous utiliserons le fait suivant.

Fait : *Soient $(X_i, g_i, m_i)_{i=1,2}$ deux systèmes dynamiques. Supposons qu'il existe une application mesurable $\omega : X_1 \to X_2$ telle que $g_2 \circ \omega = \omega \circ g_1$ et $\omega_* m_1 = m_2$. Alors χ vérifie le Principe d'Invariance Presque Sûr pour m_2 si et seulement si $\chi \circ \omega$ vérifie le Principe d'Invariance Presque Sûr pour m_1.*

Les codages $\omega : \Sigma \to \mathbb{P}^k$ que nous allons construire vérifient les relations $f \circ \omega = \omega \circ s$ et $\omega_* \mathsf{P} = \mu$. Ils ne sont pas nécessairement injectifs, toutefois ils présentent suffisamment de régularité pour transférer à μ les propriétés stochastiques de P, ceci pour de bonnes observables. Nous étudierons le défaut d'injectivité de ω au chapitre 4 afin de construire des mesures de grande entropie.

Notons enfin qu'il existe une conjugaison bimesurable entre les systèmes $(\mathbb{P}^k, f, \mu)$ et (Σ, s, P) [Br]. La démonstration utilise le critère de Hoffman-Rudolph [HR], la régularité de la conjugaison semble difficile à contrôler.

3.1 Espace de Bernoulli

Nous rappelons certaines propriétés stochastiques du système (Σ, s, P). Notons $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des n-cylindres et $\mathbb{E}(\chi|\mathcal{A}_n)$ l'espérance conditionnelle de $\chi \in L^1(\mathsf{P})$.

Nous dirons qu'une observable χ est $L^p(P)$-*cylindrique* si

$$\chi \in L^p(\mathsf{P}) \quad \text{et} \quad |\chi - \mathbb{E}(\chi|\mathcal{A}_n)|_p \leq c\, e^{-\gamma n}. \tag{3.1}$$

Ces observables vérifient la décroissance exponentielle des corrélations [Bo2] :

Théorème (Bowen) : *Soient χ_1, χ_2 deux observables $L^1(P)$-cylindriques. Alors*

$$\left| \int_\Sigma \chi_1 \cdot \chi_2 \circ s^n \, dP - \int_\Sigma \chi_1 \, dP \int_\Sigma \chi_2 \, dP \right| \leq c\, e^{-\lambda n}.$$

La preuve utilise (3.1) et l'indépendance des coordonnées de Σ. Lorsque $p > 2$, les observables $L^p(\mathsf{P})$-cylindriques satisfont le Principe d'Invariance Presque Sûr [PS] :

Théorème (Philipp-Stout) : *Si une observable χ est $L^p(P)$-cylindrique avec $p > 2$, alors χ vérifie le Principe d'Invariance Presque Sûr.*

La preuve est basée sur l'approximation du processus $(S_n(\chi))_n$ par une suite de différence de martingales. Le résultat suivant concerne le Théorème Central Limite, ici les moments sont d'ordre 2 et il n'y a pas d'estimation exponentielle [I].

Théorème (Ibragimov) : *Soit $\chi \in L^2(P)$. Si la série $\sum_{n\geq 0} |\chi - \mathbb{E}(\chi|\mathcal{A}_n)|_2$ converge, alors χ vérifie le Théorème Central Limite.*

La preuve consiste à établir la convergence des fonctions caractéristiques des variables aléatoires. Ce résultat fut employé dans [Sin] pour le flot géodésique en courbure négative et dans [Bo2] pour les difféomorphismes Axiome A. Notons que les théorèmes de Philipp-Stout et d'Ibragimov restent valables plus généralement pour toute mesure s-invariante Q sur Σ vérifiant la condition de mélange :

$$\forall E \in \mathcal{A}_{i,j}\, , \, \forall F \in \mathcal{A}_{k,l}\ , \ |\mathsf{Q}(E \cap F) - \mathsf{Q}(E)\, \mathsf{Q}(F)| \leq c\, \mathsf{Q}(E)\, \mathsf{Q}(F)\, e^{-\delta(k-j)},$$

où $i \leq j < k \leq l$ et $\mathcal{A}_{i,j} := s^{-i}\mathcal{A}_{j-i}$. Les mesures de Gibbs sur Σ vérifient cette propriété, nous utiliserons cette remarque au chapitre 4.

3.2 Théorème de codage

Nous allons coder la dynamique en utilisant les préimages d'un point. Soient $\mathcal{V} := \cup_{n=0}^{\infty} f^n(\mathcal{C})$ et $z \in \mathbb{P}^k \setminus \mathcal{V}$. On note z_n toute bijection $\mathcal{A}^n \to f^{-n}(z)$ étendue en une application $z_n : \Sigma \to f^{-n}(z)$ constante sur les n-cylindres. Une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ est dite *compatible* si $f \circ z_{n+1} = z_n \circ s$. On pose $\theta_k := 2/(5(k-1))$.

Théorème A : *Pour tout $\theta < \theta_k$, il existe un ensemble de volume nul $\mathcal{S}_\theta \subset \mathbb{P}^k$ vérifiant la propriété suivante. Pour tout $z \notin \mathcal{S}_\theta$, il existe une suite compatible $(z_n)_n$, une suite croissante $(\mathcal{G}(n))_n \subset \Sigma$ et $\rho > 0$ tels que :*

1. *$(z_n)_n$ converge P-p.p. vers une application $\omega : \Sigma \to \mathbb{P}^k$.*
2. *$P(\mathcal{G}(n)) \geq 1 - c_\theta\, d^{-\theta n}$ et $d(z_n, \omega) \leq c_\rho\, d^{-\rho n}$ sur $\mathcal{G}(n)$.*

Le point 1 montre que la suite de probabilités $(z_n)_*\mathsf{P}$ converge vers $\omega_*\mathsf{P}$. Puisque $(z_n)_*\mathsf{P}$ est la mesure uniforme sur $f^{-n}(z)$ et que $z \notin \mathcal{V}$, il vient $\omega_*\mathsf{P} = \mu$. La compatibilité de $(z_n)_n$ entraîne $f \circ \omega = \omega \circ s$.

Le point 2 fournit la convergence exponentielle en moyenne des mesures uniformes sur $f^{-n}(z)$ vers la mesure μ. L'article récent [DS6] établit la convergence exponentielle vers μ des préimages d'un point Zariski-générique.

Esquissons maintenant la preuve du théorème A. Commençons par présenter la méthode de codage (voir [J] et [PUZ] en dimension $k = 1$). Soient $z \notin \mathcal{V}$ et $\{w_\alpha\,,\ \alpha \in \mathcal{A}\}$ une énumération de $f^{-1}(z)$. Soit $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ une collection de chemins $[0,1] \to \mathbb{P}^k$ satisfaisant $\gamma_\alpha(0) = z$, $\gamma_\alpha(1) = w_\alpha$ et $\gamma_\alpha[0,1] \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Fixons $\tilde{\alpha} = (\alpha_i)_{i\geq 1} \in \Sigma$. Pour tout $n \geq 1$ on définit les chemins $\gamma_n(\tilde{\alpha})$ et les points $z_n(\tilde{\alpha})$. Pour commencer, posons $\gamma_1(\tilde{\alpha}) := \gamma_{\alpha_1}$ et $z_1(\tilde{\alpha}) := w_{\alpha_1}$. Supposons maintenant que $\gamma_j(\tilde{\alpha})$ et $z_j(\tilde{\alpha})$ soient construits pour $1 \leq j \leq n$. On définit alors $\gamma_{n+1}(\tilde{\alpha})$ comme le relevé de γ_{α_n} par f^n avec point de départ $z_n(\tilde{\alpha})$. On pose ensuite $z_{n+1}(\tilde{\alpha}) := \gamma_{n+1}(\tilde{\alpha})(1)$. Par construction, $z_n : \mathcal{A}_n \to f^{-n}(z)$ est une bijection et $f \circ z_{n+1} = z_n \circ s$. De plus, $\gamma_n(\tilde{\alpha})$ et $z_n(\tilde{\alpha})$ ne dépendent que du cylindre $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.

Il s'agit donc de construire de bons chemins $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ assurant la convergence de l'arbre. Le résultat suivant fournit ces chemins et estime le nombre de n-cylindres tels que $\mathsf{diam}\ \gamma_n(\tilde{\alpha})$ est petit. C'est une version quantifiée du théorème de Briend-Duval [BD2]. On note $L_{z,w}$ la droite complexe de $\mathbb{P}^k$ qui contient z et w.

Théorème B : *Soit $\theta < \theta_k$. Il existe un ensemble de volume nul $\mathcal{D}_\theta \subset \mathbb{P}^k$ et $\rho = \rho_\theta > 0$ satisfaisant les propriétés suivantes. Pour tout $(z,w) \in \mathbb{P}^k \setminus \mathcal{D}_\theta \cup \mathcal{V}$, il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to L_{z,w} \setminus \mathcal{V}$ joignant (z,w) et une famille décroissante de disques topologiques $(\Delta_n)_n \subset L_{z,w}$ tels que pour tout $n \geq n_{z,w}$:*

1. *$\gamma[0,1] \subset \Delta_n$.*
2. *Il existe $(1 - d^{-\theta n})d^{kn}$ branches inverses de f^n sur Δ_n.*
3. *Ces branches inverses satisfont $\mathsf{diam}\ g_n(\Delta_n) \leq c\,d^{-\rho n}$.*

Nous renvoyons à l'article [D3] pour la démonstration. La difficulté est de construire une famille décroissante de disque $\Delta_n \subset L_{z,w}$ qui n'intersecte pas les valeurs critiques de $f^{\theta n}$, et pour lesquels on contrôle le module de l'anneau $\Delta_n \setminus \frac{1}{2}\Delta_n$. La valeur de θ_k provient de la méthode géométrique utilisée.

Nous donnons maintenant la preuve du théorème A. Posons $\mathcal{S}_\theta := \mathcal{D}_\theta \cup f(\mathcal{D}_\theta) \cup \mathcal{V}$, qui est de volume nul, et appliquons la méthode de codage décrite plus haut à $z \notin \mathcal{S}_\theta$. Fixons pour cela une énumération $\{w_\alpha\}$ de $f^{-1}(z)$ et considérons des chemins continus $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ donnés par le théorème B. Ainsi, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et $n \geq n_z := \max n_{z,w_\alpha}$, il existe au moins $(1 - d^{-\theta n})d^{kn}$ cylindres $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ tels que :

$$\mathsf{diam}\ \gamma_{n+1}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha] \leq c\,d^{-\rho n}. \tag{3.2}$$

On suppose dorénavant que $n \geq n_z$. On définit les sous-ensembles de Σ :

$$\mathcal{B}_n := \{\mathsf{diam}\ \gamma_{n+1}[\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}] > c\, d^{-\rho n}\} \ , \ \mathcal{B}(n) := \cup_{p \geq n} \mathcal{B}_p \quad \text{et} \quad \mathcal{G}(n) := \Sigma \setminus \mathcal{B}(n).$$

La suite $\mathcal{G}(n)$ est croissante et on obtient à l'aide de (3.2) :

Lemme 1 :

1. *Card* $\mathcal{B}_n \leq d^{k(n+1)} d^{-\theta n}$.
2. $d(z_n, z_{n+1}) \leq c\, d^{-\rho n}$ *sur* $\mathcal{G}(n)$.

Cela entraîne $d(z_m, z_{m+1}) \leq c\, d^{-\rho m}$ pour $m \geq n$ sur $\mathcal{G}(n)$. Il s'ensuit que l'application $\omega := \lim_m z_m$ est bien définie sur $\mathcal{G}(n)$ et vérifie :

$$\forall \tilde{\alpha} \in \mathcal{G}(n) \ , \ d(z_n(\tilde{\alpha}), \omega(\tilde{\alpha})) \leq c_\rho\, d^{-\rho n}. \tag{3.3}$$

Le point 1 et la définition de P fournissent maintenant :

Lemme 2 : $\mathsf{P}(\mathcal{B}_n) \leq d^{-\theta n}$.

Il s'ensuit

$$\mathsf{P}(\mathcal{G}(n)) \geq 1 - c_\theta\, d^{-\theta n}, \tag{3.4}$$

ce qui termine la preuve du théorème A.

3.3 Conséquences stochastiques

Nous dirons qu'une observable $\psi : \mathbb{P}^k \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dans la classe $\mathcal{U}$ si :
- e^ψ est Hölder sur $\mathbb{P}^k$,
- $\mathcal{N}_\psi := \{\psi = -\infty\}$ est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}^k$ (éventuellement vide),
- $\psi \geq \log d(\cdot, \mathcal{N}_\psi)^\tau$, où $\tau > 0$.

Cette classe contient les fonctions Hölder et les fonctions à singularités logarithmiques. Un exemple important pour la suite est la fonction $\log \mathrm{Jac} f$. Le lemme suivant montre en particulier que $\mathcal{U} \subset L^p(\mu)$.

Lemme 3 : *Soient* $\psi \in \mathcal{U}$ *et* $p \geq 1$. *Alors* $\int_{\mathcal{N}_\psi[r]} |\psi|^p\, d\mu \leq \kappa\, r^{\gamma/2}$.

La preuve consiste à estimer l'intégrale sur $\mathcal{N}_\psi[r_j] \setminus \mathcal{N}_\psi[r_{j+1}]$, où $r_j := r/2^j$. On utilise ici $\psi \geq \log d(\cdot, \mathcal{N}_\psi)^\tau$ et l'inégalité $\mu\, (\mathcal{N}_\psi[r]) \leq c\, r^\gamma$.

Nous obtenons les propriétés stochastiques suivantes.

Théorème C : *La mesure* μ *satisfait pour toute observable* $\psi \in \mathcal{U}$:

1. *La décroissance exponentielle des corrélations.*
2. *Le Principe d'Invariance Presque Sûr.*

Ce théorème est une conséquence du résultat suivant, *via* les théorèmes de Bowen et de Philipp-Stout énoncés à la section 3.1.

Théorème D : *Soient* $\psi \in \mathcal{U}$ *et* ω *un codage donné par le théorème A. Alors* $\psi \circ \omega$ *est* $L^p(\mathsf{P})$*-cylindrique pour tout* $p \geq 1$.

La fin de cette section est consacrée à la preuve de ce théorème. Les propriétés de régularité du codage ω (théorème A) sont ici cruciales.

• Supposons pour commencer que ψ est Hölder. Nous montrons l'estimation $|\chi - \mathbb{E}(\chi|\mathcal{A}_n)|_p \leq c\, e^{-\gamma n}$ en travaillant sur $\mathcal{B}(n)$ puis sur $\mathcal{G}(n)$. L'estimation sur $\mathcal{B}(n)$ provient de l'inégalité de Jensen et de (3.4) (on note $\chi_A := \chi \cdot 1_A$) :

$$|\chi_{\mathcal{B}(n)} - \mathbb{E}(\chi_{\mathcal{B}(n)}|\mathcal{A}_n)|_p \leq 2|\chi|_\infty \, \mathsf{P}(\mathcal{B}(n))^{1/p} \leq 2|\chi|_\infty \left(c_\theta\, d^{-\theta n}\right)^{1/p}.$$

Soit maintenant $\phi := \chi_{\mathcal{G}(n)} - \mathbb{E}(\chi_{\mathcal{G}(n)}|\mathcal{A}_n)$ et étudions $|\phi_{\mathcal{B}(n)}|_p$, $|\phi_{\mathcal{G}(n)}|_p$. Puisque $\phi_{\mathcal{B}(n)} = -\mathbb{E}(\chi_{\mathcal{G}(n)}|\mathcal{A}_n)$ sur $\mathcal{B}(n)$ et $\phi_{\mathcal{B}(n)} = 0$ sur $\mathcal{G}(n)$, on déduit de (3.4) :

$$|\phi_{\mathcal{B}(n)}|_p \leq |\mathbb{E}(\chi_{\mathcal{G}(n)}|\mathcal{A}_n)|_{2p} \cdot \mathsf{P}(\mathcal{B}(n))^{1/2p} \leq |\chi|_{2p} \cdot \left(c_\theta\, d^{-\theta n}\right)^{1/2p}.$$

Il reste à estimer $|\phi_{\mathcal{G}(n)}|_p$. Observons pour cela que pour tout $\tilde{\alpha} \in \mathcal{G}(n)$:

$$\phi_{\mathcal{G}(n)}(\tilde{\alpha}) = \int_{[\tilde{\alpha}]_n \cap \mathcal{G}(n)} \left(\chi(\tilde{\alpha}) - \chi(\tilde{\beta})\right) d\mathsf{P}_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta}) + \chi(\tilde{\alpha}) \cdot \mathsf{P}_{\tilde{\alpha}}([\tilde{\alpha}]_n \cap \mathcal{B}(n)),$$

où $[\tilde{\alpha}]_n := [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et $\mathsf{P}_{\tilde{\alpha}}$ est la probabilité conditionnelle de P sur $[\tilde{\alpha}]_n$. On déduit de $\chi = \psi \circ \omega$, de (3.3) et du fait que ψ est Hölder (d'exposant h) :

$$\forall \tilde{\alpha} \in \mathcal{G}(n) \ , \ |\phi_{\mathcal{G}(n)}(\tilde{\alpha})| \leq \left(2\, c_\rho\, d^{-\rho n}\right)^h + |\chi|_\infty \cdot \mathsf{P}_{\tilde{\alpha}}([\tilde{\alpha}]_n \cap \mathcal{B}(n)).$$

On intègre ensuite sur $\mathcal{G}(n)$ pour obtenir $|\phi_{\mathcal{G}(n)}|_p^p \leq d^{-\rho n h p} + |\chi|_\infty^p \, c_\theta\, d^{-n\theta}$. Cela termine la preuve du théorème B dans le cas Hölder.

• Pour le cas général $\psi \in \mathcal{U}$, on ajoute au découpage un voisinage de $\mathcal{N}_\psi$:

$$\mathcal{B}'(n) := \mathcal{B}(n) \setminus \mathcal{N}_n \quad , \quad \mathcal{G}'(n) = \mathcal{G}(n) \setminus \mathcal{N}_n \quad , \quad \mathcal{N}_n := \omega^{-1}\left(\mathcal{N}_\psi[d^{-n(h\rho/2\tau)}]\right).$$

On rappelle que $\psi \geq \log d(., \mathcal{N}_\psi)^\tau$. L'inégalité de Jensen et le lemme 3 entraînent

$$|\chi_{\mathcal{N}_n} - \mathbb{E}(\chi_{\mathcal{N}_n}|\mathcal{A}_n)|_p \leq 2|\chi_{\mathcal{N}_n}|_p \leq \left(\kappa\, d^{-n(h\rho/2\tau)\cdot(\gamma/2)}\right)^{1/p}.$$

Les estimations suivantes permettent de traiter $\mathcal{B}'(n)$ et $\mathcal{G}'(n)$.

(i) $\mathsf{P}(\mathcal{G}'(n)^c) \leq c_\theta d^{-\theta n} + d^{-n\gamma(h\rho/2\tau)} \leq c\, d^{-\eta n}$.

(ii) $|\chi_{\mathcal{N}_n^c}|_\infty \leq n\, h\rho \log d$.

La première est une conséquence de (3.4) et de $\mu(\mathcal{N}_\psi[r]) \leq c\, r^\gamma$, la deuxième provient de $\chi \geq \log d^{-\tau n(h\rho/2\tau)}$ sur $\mathcal{N}_n^c$. Ces deux inégalités entraînent :

$$|\chi_{\mathcal{B}'(n)} - \mathbb{E}(\chi_{\mathcal{B}'(n)}|\mathcal{A}_n)|_p \leq 2|\chi_{\mathcal{B}'(n)}|_p \leq n\, h\rho \log d \cdot \left(c\, d^{-\eta n}\right)^{1/p}.$$

Soit maintenant $\phi := \chi_{\mathcal{G}'(n)} - \mathbb{E}(\chi_{\mathcal{G}'(n)}|\mathcal{A}_n)$. Comme dans le cas Hölder, (i) fournit l'estimée pour $|\phi_{\mathcal{G}'(n)^c}|_p$. On a ensuite pour tout $\tilde{\alpha} \in \mathcal{G}'(n)$:

$$\phi_{\mathcal{G}'(n)}(\tilde{\alpha}) = \int_{[\tilde{\alpha}]_n \cap \mathcal{G}'(n)} \left(\chi(\tilde{\alpha}) - \chi(\tilde{\beta})\right) d\mathsf{P}_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta}) + \chi(\tilde{\alpha}) \cdot \mathsf{P}_{\tilde{\alpha}}([\tilde{\alpha}]_n \cap \mathcal{G}'(n)^c). \tag{3.5}$$

Puisque $\chi = \psi \circ \omega$ et $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \notin \mathcal{N}_n$, l'inégalité (ii) implique :

$$|\chi(\tilde{\alpha}) - \chi(\tilde{\beta})| = |\log e^{\psi\circ\omega}(\tilde{\alpha}) - \log e^{\psi\circ\omega}(\tilde{\beta})| \leq d^{nh\rho/2}\, |e^{\psi\circ\omega}(\tilde{\alpha}) - e^{\psi\circ\omega}(\tilde{\beta})|.$$

On récupère une puissance négative en utilisant (3.3) et le fait que e^ψ est h-Hölder :

$$|\chi(\tilde{\alpha}) - \chi(\tilde{\beta})| \leq d^{nh\rho/2} \cdot \left(2\, c_\rho\, d^{-n\rho}\right)^h \leq c\, d^{-nh\rho/2}.$$

On termine alors comme dans le cas Hölder, en utilisant (i) et (ii).

Chapitre 4

Mesures de grande entropie

Une mesure ergodique ν est dite de *grande entropie* si $h_\nu > \log d^{k-1}$. Nous commençons par rappeler deux propriétés de localisation pour ces mesures. Les preuves reposent sur une version localisée du principe variationnel [Bo1]. Notons $h_{top}(A)$ l'entropie topologique de f relativement à un sous-ensemble $A \subset \mathbb{P}^k$.

Théorème (Principe variationnel relatif) : *Soit ν une mesure ergodique telle que $\nu(A) > 0$. Alors son entropie métrique vérifie $h_\nu \leq h_{top}(A)$.*

La propriété suivante est établie dans [BD2].

Théorème (Briend-Duval) : *Soit ν une mesure de grande entropie. Alors ν ne charge pas les sous-ensembles algébriques propres de $\mathbb{P}^k$.*

La preuve reprend la méthode de Gromov : celle-ci s'adapte et fournit $h_{top}(A) \leq \log d^p$ pour tout sous-ensemble algébrique $A \subset \mathbb{P}^k$ de dimension complexe p. Le principe variationnel rappelé ci-dessus permet alors de conclure.

Le résultat suivant est dû à de Thélin [dT1] ($k = 2$) et à Dinh [Di] ($k \geq 2$).

Théorème (de Thélin, Dinh) : *Soit ν une mesure de grande entropie. Alors le support de ν est contenu dans celui de la mesure d'équilibre μ.*

La démonstration utilise la convergence exponentielle de $\frac{1}{d^n} f^{n*}\omega$ vers T : cela entraîne $h_{top}(A) \leq \log d^{k-1}$ pour tout compact A ne rencontrant pas le support de μ. On invoque à nouveau le principe variationnel pour conclure.

Nous poursuivons dans ce chapitre l'étude des mesures de grande entropie. Nous montrons tout d'abord qu'elles sont dilatantes, nous construisons ensuite des exemples en utilisant la méthode de codage du chapitre 3. Plus précisément, nous montrons la convergence de suites de probabilités non uniformes sur $f^{-n}(z)$, avec préservation de l'entropie. Dans le cas des mesures produits sur Σ, on obtient $h_\nu = -\sum w_\alpha \log w_\alpha$, où $(w_1, \ldots, w_{d^k})$ désignent les poids (proches de d^{-k}) sur les branches inverses de f.

4.1 Exposants des mesures de grande entropie

Rappelons l'inégalité de Ruelle [R]. On note $\lambda^+ := \max\{\lambda, 0\}$.

Théorème (Ruelle) : *Soit f une application de classe C^1 sur une variété compacte et ν une mesure ergodique. Soient $\Lambda_q < \ldots < \Lambda_1$ les exposants distincts de ν et $m_1, \ldots, m_q$ leurs multiplicités respectives. Alors $h_\nu \leq m_1\Lambda_1^+ + \ldots + m_q\Lambda_q^+$.*

Ce théorème fournit $h_\nu \leq 2\lambda^+$ pour tout système $(\mathbb{P}^1, f, \nu)$, une mesure d'entropie strictement positive est donc dilatante dans ce contexte.

L'énoncé suivant généralise ce fait en dimension supérieure [D5].

Théorème A : *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ et ν une mesure de grande entropie. Alors les exposants de ν sont supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2}(h_\nu - \log d^{k-1}) > 0$.*

Ce résultat a été établi par de Thélin [dT2] sous l'hypothèse $\log \mathrm{Jac}\, f \in L^1(\nu)$ (i.e. la finitude des exposants). Nous vérifions (voir plus bas) que les arguments s'adaptent dans le cas non intégrable avec d'autres ingrédients. Nous remercions de Thélin pour nous avoir signalé cette possibilité d'extension.

Le théorème A est une conséquence du théorème B ci dessous lorsque ν présente plusieurs exposants. Si ν possède un seul exposant Λ (de multiplicité $2k$), le théorème A se déduit directement de l'inégalité de Ruelle.

Théorème B : *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ et ν une mesure ergodique. Soient $\Lambda_q < \ldots < \Lambda_1$ les exposants de ν et $m_1, \ldots, m_q$ leurs multiplicités. Supposons que $q \geq 2$. Alors $h_\nu \leq \log d^{m_1+\ldots+m_{j-1}} + 2m_j\Lambda_j^+ + \ldots + 2m_q\Lambda_q^+$ pour tout $2 \leq j \leq q$.*

La preuve repose dans [dT2] sur la construction de variétés stables relatives et sur l'estimation de leur volume : elles sont construites dans ce contexte en utilisant des transformées de graphe pour f^{-1} le long d'orbites ν-génériques. Dans le cas non intégrable, nous utilisons des transformées de graphe pour f : on fait pour cela appel à la méthode de Hirsch-Pugh-Shub [HPS], qui autorise les applications non injectives, et au théorème de Newhouse [N1], qui fournit les cartes d'Oseledec-Pesin. Les estimées de volume s'obtiennent alors comme dans [dT2], la présence possible de multiplicités ne modifie pas les inégalités.

Notons que Buzzi [Bu] a obtenu un résultat similaire au théorème B en dynamique réelle, où le terme $\log d^{m_1+\ldots+m_{j-1}}$ est remplacé par l'entropie topologique des disques immergés de dimension $m_1 + \ldots + m_{j-1}$.

4.2 Construction de mesures de grande entropie

Nous utilisons les codages ω du chapitre 3. Dans un premier temps nous observons que ces applications sont définies presque partout pour des mesures de Gibbs proches de la mesure standard P. Nous montrons ensuite qu'elles préservent l'entropie en étudiant leur défaut d'injectivité. Les propriétés de régularité de ω seront à nouveau cruciales.

Projection des mesures de Gibbs

Soit P_φ la mesure de Gibbs sur Σ associée au potentiel Hölder $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}$. C'est l'unique mesure s-invariante satisfaisant pour tout $\tilde{\alpha} \in \Sigma$ et $n \geq 1$:

$$\mathsf{P}_\varphi[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \simeq \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ s^i(\tilde{\alpha}) - nP(\varphi)\right) \tag{4.1}$$

à des constantes multiplicatives près, où $P(\varphi)$ désigne la pression de φ. C'est aussi l'unique mesure s-invariante telle que

$$P(\varphi) = \int_\Sigma \varphi \, d\mathsf{P}_\varphi + h_{\mathsf{P}_\varphi}.$$

Notons $\tau_\theta(\varphi) := P(\varphi) - |\varphi|_\infty - \log d^{k-\theta}$ et observons que $\tau_\theta(\varphi) > 0$ implique $h_{\mathsf{P}_\varphi} > \log d^{k-\theta}$. On obtient la version suivante du théorème A du chapitre 3.

Théorème C : *Pour tout $\theta < \theta_k$, il existe un ensemble de volume nul $\mathcal{S}_\theta \subset \mathbb{P}^k$ vérifiant la propriété suivante. Pour tout $z \notin \mathcal{S}_\theta$, il existe une suite compatible $(z_n)_n$, une suite croissante $(\mathcal{G}(n))_n \subset \Sigma$ et $\rho > 0$ tels que pour tout potentiel Hölder $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}$ vérifiant $\tau := \tau_\theta(\varphi) > 0$:*

1. *$(z_n)_n$ converge P_φ-p.p. vers une application $\omega : \Sigma \to \mathbb{P}^k$.*
2. *$\mathsf{P}_\varphi(\mathcal{G}(n)) \geq 1 - c_\tau \, e^{-n\tau}$ et $d(z_n, \omega) \leq c_\rho \, d^{-\rho n}$ sur $\mathcal{G}(n)$.*

La preuve repose sur l'estimation $\mathsf{P}_\varphi(\mathcal{B}_n) \leq c\, e^{-n\tau_\theta(\varphi)}$ provenant de la combinaison de (4.1) et des résultats de la section 3.2. Les mesures images $\omega_* \mathsf{P}_\varphi$ fournissent des mesures invariantes mélangeantes. Elles vérifient à l'instar de μ la décroissance exponentielle des corrélations et le Principe d'Invariance Presque Sûr pour les observables Hölder. Observons que l'on peut prendre pour P_φ une mesure produit dont les poids $(w_1, \ldots, w_{d^k})$ sont proches de d^{-k} : cette mesure s'obtient avec le potentiel $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) := \log w_{\alpha_1}$. On obtient alors le résultat suivant.

Théorème D : *Soient $\theta < \theta_k$ et $(w_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ satisfaisant $\sum w_\alpha = 1$ et $w_\alpha \leq d^{-k+\theta}$. Alors, pour tout $z \notin \mathcal{S}_\theta$, il existe une suite compatible $(z_n)_n$ telle que*

$$\nu_n := \sum_{f^n(y)=z} \Big(\prod_{i=1}^n w_{\alpha_i}\Big) \delta_y \qquad (\textit{où l'on pose } y = z_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$$

converge vers une mesure f-invariante et mélangeante.

Le codage préserve l'entropie

Nous montrons dans cette partie que ω préserve l'entropie, quitte à bien choisir z. Soient $\theta < \theta_k$ et $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}$ un potentiel Hölder tel que $\tau_\theta(\varphi) > 0$. L'ensemble $\mathcal{S}_\theta$ a été introduit au théorème C.

Théorème E : *Il existe un ensemble de volume nul $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}^k$ satisfaisant la propriété suivante : $h_{\omega_* \mathsf{P}_\varphi}(f) = h_{\mathsf{P}_\varphi}(s)$ pour tout $z \notin \mathcal{S}_\theta \cup \mathcal{H}$.*

La preuve consiste à estimer la taille des fibres de ω et à appliquer la formule d'Abramov-Rohlin. Une technique similaire a été employée par Przytycki [Pr] pour des applications de Riemann définies sur le disque unité.

Soient $\rho > 0$ et $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}^k$ un sous-ensemble tel que pour tout $z \notin \mathcal{H}$ et $n \geq 1$, les points de $f^{-n}(z)$ soient $d^{-\rho n}$-séparés : $\mathcal{H}$ est le complémentaire d'un ensemble postcritique épaissi, sa construction reprend les arguments de Misiurewicz-Przytycki [MP].

Soient ϵ la partition en points de $\mathbb{P}^k$ et $H(\mathcal{A}_n \,|\, \omega^{-1}\epsilon)$ l'entropie conditionnelle de $\mathcal{A}_n$ sachant $\omega^{-1}\epsilon$. On dispose de la formule d'addition suivante [AR] (voir également l'article de Ledrappier-Walters [LW]).

Théorème (Abramov-Rohlin) : $h_{\mathsf{P}_\varphi}(s) = h_{\omega_* \mathsf{P}_\varphi}(f) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{A}_n \,|\, \omega^{-1}\epsilon)$.

La preuve du théorème E consiste à contrôler le terme d'entropie fibrée. Nous utilisons la majoration suivante : $H(\mathcal{A}^n \,|\, \omega^{-1}\epsilon) \leq \sup_{y\in\mathbb{P}^k} \log \mathsf{Card}\; C_n(y)$, où

$$C_n(y) := \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{A}^n \ , \ \exists \sigma \in \Sigma \ , \ \omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \sigma) = y\}.$$

Il s'agit de montrer que $C_n(y)$ contient essentiellement un seul élément (s'il n'est pas vide). Soient $(\alpha, \beta) \in C_n(y)$. On peut supposer $(\alpha, \beta) \in \mathcal{G}(n)$ car la P_φ-mesure de $\mathcal{B}(n)$ est exponentiellement petite (théorème C). On obtient alors

$$d(z_n(\alpha), z_n(\beta)) \leq d(z_n(\alpha), y) + d(y, z_n(\beta)) \leq c\, d^{-\rho n},$$

ce qui entraîne $z_n(\alpha) = z_n(\beta)$ par la séparation des points de $f^{-n}(z)$. La bijectivité de z_n permet de conclure. Nous renvoyons à l'article [D5] pour les détails techniques.

Observons que le théorème E entraîne $h_{\omega_* \mathsf{P}_\varphi} = -\sum w_\alpha \log w_\alpha$ pour les mesures produits construites au théorème D. Il implique également la propriété suivante, où $\mathcal{M}$ désigne l'ensemble des mesures invariantes.

Corollaire : *La fonction d'entropie $h : \mathcal{M} \to [0, \log d^k]$ contient dans son image un intervalle non trivial de la forme $[\log d^k - \epsilon, \log d^k]$.*

Rappelons que d'après Newhouse [N2], la fonction h est semi-continue supérieurement pour toute application C^∞ d'une variété compacte. Cela montre l'existence d'une mesure d'entropie maximale, mais n'entraîne pas le corollaire.

Chapitre 5

Dimension des mesures dilatantes

La dimension $\dim_{\mathcal{H}} \nu$ d'une mesure de probabilité sur une variété M est la borne inférieure des dimensions de Hausdorff des boréliens de ν-mesure totale : c'est donc la dimension de son support *borélien*. Les dimensions *ponctuelles* inférieures et supérieures de ν sont définies par

$$\forall x \in M \quad , \quad \underline{\delta}(x) := \liminf_{r \to 0} \frac{\log \nu(B_x(r))}{\log r} \quad , \quad \bar{\delta}(x) := \limsup_{r \to 0} \frac{\log \nu(B_x(r))}{\log r}.$$

On notera $\delta(x)$ lorsque la limite existe. Young [Y] a montré que les fonctions $\underline{\delta}$ et $\bar{\delta}$ sont reliées à $\dim_{\mathcal{H}} \nu$ de la manière suivante : si $a \leq \underline{\delta}(x) \leq \bar{\delta}(x) \leq b$ pour ν-presque tout $x \in M$, alors $a \leq \dim_{\mathcal{H}} \nu \leq b$.

On consultera le livre de Pesin [Pe2] pour une introduction à la théorie de la dimension pour les systèmes dynamiques. Nous nous plaçons dorénavant dans le contexte des mesures *invariantes*. Les fonctions $\underline{\delta}$ et $\bar{\delta}$ sont constantes ν-presque partout lorsque ν est ergodique.

Le théorème de Brin-Katok [BK] stipule que l'entropie de ν coïncide avec la "dimension dynamique" de ν. Plus précisément, notons d_n la distance de Bowen définie sur M par

$$d_n(x, y) := \max\{d(f^q(x), f^q(y)) \, , \, 0 \leq q \leq n - 1\}$$

et soient $B_n(x, r)$ les boules correspondantes.

Théorème (Brin-Katok) : *Pour ν-presque tout $x \in M$, on a :*

$$\sup_{r>0} \liminf_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} \log \nu(B_n(x, r)) = h_\nu.$$

Autrement dit, $\nu(B_n(x, r)) \simeq e^{-nh_\nu}$ pour r assez petit et n assez grand. Il faut donc environ e^{nh_ν} boules dynamiques pour recouvrir un borélien de mesure positive.

Nous rappelons à présent certains résultats concernant la théorie de la dimension pour les systèmes dynamiques. Nous commençons par les difféomorphismes de variété compactes puis abordons le cas des endomorphismes de $\mathbb{P}^k$.

Cas des difféomorphismes

La dimension des mesures hyperboliques ν (sans exposant nul) des difféomorphismes de variété compactes M est maintenant bien comprise. Le cas des surfaces est résolu dans [Y] :

Théorème (Young) : *Soient f un $C^{1+\epsilon}$-difféomorphisme d'une surface M et ν une mesure ergodique d'entropie $h_\nu > 0$. Alors*

$$\forall x \in M \ \nu\text{-}p.p. \ , \ \delta(x) = \frac{h_\nu}{\lambda_1} - \frac{h_\nu}{\lambda_2},$$

où $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ désignent les exposants de ν.

En dimension supérieure, Ledrappier-Young [LY] ont montré la formule suivante pour la dimension ponctuelle instable. La dimension ponctuelle stable $\delta^s(x)$ vérifie une formule analogue.

Théorème (Ledrappier-Young) : *Soient f un C^2-difféomorphisme d'une variété M et ν une mesure ergodique. Alors*

$$\forall x \in M \ \nu\text{-}p.p. \ , \ \delta^u(x) = \frac{h_1}{\lambda_1} + \sum_{i=2}^{u} \frac{h_i - h_{i-1}}{\lambda_i}, \tag{5.1}$$

où $\lambda_u < \ldots < \lambda_1$ désignent les exposants strictement positifs de ν et $h_1 \leq \ldots \leq h_u$ les entropies conditionnelles le long des variétés instables $\mathcal{W}^1 \subset \ldots \subset \mathcal{W}^u$.

Nous renvoyons à [LY] pour la définition et l'existence des entropies conditionnelles, cette étape est un point important de la démonstration.

Ledrappier-Young montrent également dans [LY] la relation $\overline{\delta} \leq \delta^s + \delta^u$ ν-p.p.. La formule de sommation est établie dans l'article [BPS] :

Théorème (Barreira-Pesin-Schmeling) : *Soient f un $C^{1+\epsilon}$-difféomorphisme d'une variété M et ν une mesure ergodique. Alors*

$$\forall x \in M \ \nu\text{-}p.p. \ , \ \delta(x) = \delta^s(x) + \delta^u(x).$$

La preuve consiste à montrer que toute mesure hyperbolique d'un difféomorphisme présente une structure proche de la structure produit.

Cas des endomorphismes de $\mathbb{P}^k$

On dispose de la formule suivante en dimension 1 [Mañ].

Théorème (Mañé) : *Soient f une fraction rationnelle sur $\mathbb{P}^1$ et ν une mesure dilatante d'exposant $\lambda > 0$. Alors*

$$\forall x \in \mathbb{P}^1 \ \nu\text{-}p.p. \ , \ \delta(x) = \frac{h_\nu}{\lambda}.$$

La preuve repose sur le caractère *conforme* des fractions rationnelles. En effet, cela implique que les boules dynamiques et géométriques coïncident :

$$\forall x \in \mathbb{P}^1 \ \nu\text{-p.p.} \ , \ B_n(x,r) \simeq B_x(re^{-n\lambda}).$$

La formule provient alors d'une variante du théorème de Brin-Katok (on peut prendre indifféremment $\limsup$ ou $\liminf$ dans l'énoncé).

En dimension $k \geq 2$, on dispose du résultat suivant (voir par exemple [DD]).

Proposition : *Soient f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ et ν une mesure dilatante d'exposants $\lambda_k \leq \ldots \leq \lambda_1$. Alors*

$$\forall x \in \mathbb{P}^k \ \nu\text{-}p.p. \ , \ \frac{h_\nu}{\lambda_1} \leq \underline{\delta}(x) \leq \bar{\delta}(x) \leq \frac{h_\nu}{\lambda_k}.$$

On identifie ici les boules dynamiques à des branches inverses :

$$\forall x \in \mathbb{P}^k \ \nu\text{-p.p.} \ , \ B_n(x,r) \simeq f_{\hat{x}_n}^{-n}[B_{x_n}(r)].$$

On utilise ensuite les inclusions $B_x(re^{-n\lambda_1}) \subset f_{\hat{x}_n}^{-n}[B_{x_n}(r)] \subset B_x(re^{-n\lambda_k})$ pour établir les inégalités mentionnées.

Une formule pour la dimension

La formule proposée ci-dessous généralise celle de Mañé. Elle a été formulée par Binder-de Marco [BdM] pour $\dim_{\mathcal{H}} \mu$, nous l'étendons ici à la dimension ponctuelle de μ (voir plus loin le corollaire A).

Conjecture : *Soient f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ et μ sa mesure d'équilibre. Alors*

$$\forall x \in \mathbb{P}^k \ \mu\text{-}p.p. \ , \ \delta(x) = \frac{\log d}{\lambda_1} + \cdots + \frac{\log d}{\lambda_k}.$$

Cette égalité est cohérente avec (5.1) si l'on conjecture $h_i = \log d^i$ pour les entropies conditionnelles sur les variétés instables relatives. La définition $\mu = T^k$ comme masse de Monge-Ampère vient renforcer cette proposition de sommation.

Nous obtenons dans les prochaines sections des estimations sur la dimension de Hausdorff des mesures dilatantes. En particulier, nous obtenons la minoration dans la conjecture lorsque $k = 2$.

La section 5.1 donne une majoration basée sur le volume des branches inverses. La minoration de la section 5.2 passe par une étude de la croissance des sections des branches inverses, on utilisera pour cela le théorème de normalisation du chapitre 2.

5.1 Majoration de la dimension

Théorème A : *Soient f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ et ν une mesure dilatante. Si $\lambda_k \leq \ldots \leq \lambda_1$ désignent les exposants de ν et $\Sigma := \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$ leur somme, alors*

$$\dim_{\mathcal{H}} \nu \leq 2k - \frac{2\Sigma - \log d^k}{\lambda_1}.$$

Ce résultat est établi dans [DD] pour la mesure μ, les arguments s'étendent aux mesures dilatantes ν (notons que $2\Sigma - \log d^k \geq 0$ pour μ). Le théorème A entraîne la caractérisation suivante des endomorphismes de Lattès, cela complète le théorème énoncé au début du chapitre 1.

Corollaire : *Un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ est de Lattès si et seulement si sa mesure d'équilibre vérifie* $\dim_{\mathcal{H}} \mu = 2k$.

En effet, le théorème A et la minoration des exposants par $\log \sqrt{d}$ montrent que la maximalité de la dimension implique la minimalité des exposants.

La preuve du théorème A repose sur le contrôle du volume des branches inverses, nous reprenons ici la méthode de [BdM] employée pour les applications polynomiales de $\mathbb{C}^k$. Par ergodicité de ν, il suffit de construire pour tout $\epsilon > 0$ un borélien $A = A_\epsilon$ vérifiant $\nu(A) > 0$ et une constante $c_\epsilon > 0$ (avec $\lim_{\epsilon \to 0} c_\epsilon = 1$) tels que

$$\dim_{\mathcal{H}} A \leq 2k - c_\epsilon \frac{2\Sigma - \log d^k}{\lambda_1}. \tag{5.2}$$

Soient $\widehat{A} := \{\hat{x} \in \mathsf{O}\,,\, r(\hat{x}) > r\}$ et $A := \pi(\widehat{A})$ (voir le chapitre introductif Outils et Notations pour la définition de r et les propriétés ci-dessous). Le fait que la fonction r soit lente entraîne pour tout $x \in A$:

(a) $f^{-n}_{\hat{x}_n}$ est bien définie sur $B_{x_n}(re^{-n\epsilon})$.

(b) $\mathcal{P} := f^{-n}_{\hat{x}_n}[B_{x_n}(re^{-n\epsilon})]$ contient $B_x(re^{-n(\lambda_1+2\epsilon)})$.

(c) $m(\mathcal{P}) \leq r^{2k} e^{-2n\Sigma}$.

Observons maintenant que le borélien A est recouvert par au plus d^{kn} branches inverses $(\mathcal{P}_i)_{i\in I}$ du type $\mathcal{P}$, car f^n est de degré topologique d^{kn}. Soit $(\mathcal{M}_j)_{j\in J}$ un maillage de $\mathbb{P}^k$ de taille $re^{-n(\lambda_1+2\epsilon)}$. Le point ($b$) stipule que si $\mathcal{M}_j \cap A \neq \emptyset$, alors $\mathcal{M}_j \subset \cup_{i\in I}\mathcal{P}_i$. On déduit alors de ($c$) (avec $r \leq 1$) :

$$\mathsf{Card}\ J \leq \frac{m\left(\cup_{i\in I}\mathcal{P}_i\right)}{m\left(\mathcal{M}_j\right)} \leq \frac{d^{kn}e^{-2n\Sigma}}{\left(re^{-n\lambda_1}\right)^{2k}} \left(e^{2n\epsilon}\right)^{2k},$$

ce qui montre (5.2).

5.2 Minoration de la dimension ponctuelle

Nous montrons dans [D4] le résultat suivant.

Théorème B : *Soient f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ et ν une mesure dilatante. Alors*

$$\forall x \in \mathbb{P}^k \ \nu\text{-}p.p. \ , \ \underline{\delta}(x) \ \geq \ \frac{\log d^{k-1}}{\lambda_1} + \frac{h_\nu - \log d^{k-1}}{\lambda_k}.$$

La démonstration repose sur une étude de la distribution des branches inverses de f^n dans $\mathbb{P}^k$, cela fera l'objet du théorème C énoncé à la section 5.2.2. Nous commençons par énoncer quelques corollaires.

5.2.1 Conséquences du théorème B

Les deux premiers corollaires concernent la mesure d'équilibre μ.

Corollaire A : *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$. Alors*

$$\forall x \in \mathbb{P}^k \ \mu\text{-}p.p. \ , \ \underline{\delta}(x) \ \geq \ \frac{\log d^{k-1}}{\lambda_1} + \frac{\log d}{\lambda_k}.$$

Ainsi, la minoration de la conjecture est vérifiée pour un endomorphisme de $\mathbb{P}^2$:

$$\forall x \in \mathbb{P}^2 \ \mu\text{-}p.p. \ , \ \underline{\delta}(x) \ \geq \ \frac{\log d}{\lambda_1} + \frac{\log d}{\lambda_2}.$$

La combinaison du théorème A (majoration) et du corollaire A montre la conjecture pour une classe d'endomorphismes non conformes :

Corollaire B : *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$. Si les exposants de sa mesure d'équilibre vérifient $\lambda_k = \log \sqrt{d}$ et $\lambda_{k-1} = \ldots = \lambda_1$, alors*

$$\dim_{\mathcal{H}} \mu = \frac{\log d^{k-1}}{\lambda_1} + \frac{\log d}{\lambda_k}.$$

Le dernier corollaire concerne les mesures de grande entropie. Les exposants d'une telle mesure vérifient $\frac{1}{2}(h_\nu - \log d^{k-1}) \leq \lambda_k \leq \cdots \leq \lambda_1$ (chapitre 4). Cette minoration, combinée avec le théorème B, fournit les bornes suivantes sur λ_1.

Corollaire C : *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ et ν une mesure de grande entropie.*

1. *Alors $\lambda_1 \geq (1 - 1/k) \log \sqrt{d}$.*
2. *Si de plus $h_\nu < (1 + 1/k) \log d^{k-1}$, alors il existe $\varphi(h_\nu) > 0$ tel que*

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{2}(h_\nu - \log d^{k-1}) + \varphi(h_\nu).$$

Le dernier point montre que la borne sur les exposants n'est pas optimale pour les mesures d'entropie proche de $\log d^{k-1}$. Toutefois, l'existence de telles mesures n'est pas encore assurée, une amélioration de θ_k (chapitre 3) permettrait d'en construire.

5.2.2 Distribution des branches inverses

Le théorème B est une conséquence du théorème suivant : il établit une majoration du nombre de branches inverses de f^n dans les boules génériques de rayon $e^{-n\lambda_k}$. Soient q_n la partie entière de $n\lambda_k/\lambda_1$ et $B_x^A(r) := B_x(r) \cap A$.

Théorème C : *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{P}^k$ et $r > 0$ satisfaisant $\nu(\Omega_\epsilon) > 1-\epsilon$ et la propriété suivante. Soit $\mathcal{E}_r \subset \mathbb{P}^k$ un ensemble r-séparé maximal. Alors pour tout $x \in \Omega_\epsilon$ et n assez grand, la collection de branches inverses*

$$\mathcal{P}_n(x) := \left\{ f_{\hat{y}_n}^{-n} B_p(r) \ , \ y \in B_x^{\Omega_\epsilon}(re^{-n\lambda_k}) \ , \ p \in \mathcal{E}_r \ , \ d(p, y_n) < r \right\}$$

est bien définie et satisfait Card $\mathcal{P}_n(x) \leq d^{(k-1)(n-q_n)} e^{n\epsilon}$.

Nous verrons à la fin de cette section comment le théorème C implique le théorème B. Notons que l'ensemble Ω_ϵ est introduit afin de travailler en dynamique presque uniforme (boîtes de Pesin). La preuve du théorème C utilise le théorème de normalisation des branches inverses (chapitre 2) et le lemme de croissance suivant.

Lemme (Croissance des polydisques) : *Soit $\eta : \mathbb{D}^{k-1}(2) \to \mathbb{P}^k$ un polydisque holomorphe borné. Alors* aire *$f^m \circ \eta_{|\mathbb{D}^{k-1}} \leq d^{(k-1)m}$ pour tout $m \geq 1$.*

On dit que η est *borné* si son image est contenue dans un ouvert borné d'une carte affine. On définit aire $\eta := \int_{\mathbb{D}^{k-1}(r)} \eta^* \omega^{k-1}$, où $\mathbb{D}^{k-1}(r)$ désigne le domaine de définition de η et ω la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^k$ (cette aire compte les multiplicités). La preuve du lemme consiste à remplacer ω par le courant de Green T dans la définition de l'aire, puis à utiliser l'identité $f^*T = dT$. Cette substitution repose sur le fait que T est cohomologue à ω, les calculs nécessitent des intégrations par parties. Notons que Dinh [Di] utilise des arguments analogues pour majorer l'entropie topologique en dehors du support des courants T^j.

Le lemme de croissance implique la proposition suivante.

Proposition A : *Soient $x \in \Omega_\epsilon$ et $\mathcal{L}_n$ l'ensemble des polydisques $L_n : \mathbb{D}^{k-1} \to B_x(e^{-n\lambda_k})$. Alors* aire *$f^n \circ L_n \leq d^{(k-1)(n-q_n)}$ pour tout $L_n \in \mathcal{L}_n$.*

Pour le voir, on applique le lemme à $\eta = f^{q_n} \circ L_n$ et $m = n - q_n$. L'entier q_n est introduit pour rendre le polydisque borné. En effet, puisque λ_1 est le plus grand exposant et $q_n\lambda_1 \simeq n\lambda_k$, on a $f^{q_n}(B_x(e^{-n\lambda_k})) \subset B_{f^{q_n}(x)}(e^{-n\lambda_k} \cdot e^{q_n\lambda_1}) \simeq B_{f^{q_n}(x)}(1)$.

La proposition qui suit est basée sur le théorème de formes normales.

Proposition B : *Il existe $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{L}_n$ de cardinal au plus $e^{n\epsilon}$ vérifiant : pour tout $P_n \in \mathcal{P}_n(x)$, il existe un $(k-1)$-polydisque $L_n \in \mathcal{F}_n$ satisfaisant*

$$\text{aire}\, f^n \circ L_{n|L_n^{-1}(P_n)} \geq 1.$$

La géométrie des branches inverses est en effet très simple une fois que l'on a normalisé : chaque $P_n \in \mathcal{P}_n(x)$ s'identifie à un parallélépipède de dimensions

$e^{-n\lambda_1} \leq \ldots \leq e^{-n\lambda_k}$. Plus précisément le polydisque L_n est transverse à la $e^{-n\lambda_k}$-direction de P_n. En pratique, on peut prendre pour la famille $\mathcal{F}_n$ une collection d'hyperplans parallèles aux axes des coordonnées.

Le théorème C est finalement une conséquence des propositions A, B et du fait que les branches inverses sont disjointes : ces résultats combinés fournissent la borne $\mathsf{Card}\ \mathcal{P}_n(x) \leq d^{(k-1)(n-q_n)} e^{n\epsilon}$.

Expliquons maintenant comment le théorème C implique le théorème B. Soient $x \in \Omega_\epsilon$ et $\rho_n := e^{-n\lambda_k}$. Puisque la collection $\mathcal{P}_n(x)$ recouvre la boule générique $B_x^{\Omega_\epsilon}(\rho_n)$ (théorème C) et que $\nu(P) \simeq e^{-nh_\nu}$ pour tout $P \in \mathcal{P}_n(x)$ (théorème de Brin-Katok), il vient

$$\nu(B_x^{\Omega_\epsilon}(\rho_n)) \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_n(x)} \nu(P) \leq \mathsf{Card}\ \mathcal{P}_n(x) \cdot e^{-nh_\nu}.$$

Le théorème de densité entraîne alors pour tout $x \in \Omega_\epsilon$ ν-p.p. et n assez grand :

$$\nu\left(B_x(\rho_n)\right) \leq 2\,\mathsf{Card}\ \mathcal{P}_n(x) \cdot e^{-nh_\nu}.$$

La majoration $\mathsf{Card}\ \mathcal{P}_n(x) \leq d^{(k-1)(n-q_n)}$ (théorème B) fournit :

$$\liminf_{r \to 0} \frac{\log \nu(B_x(r))}{\log r} \geq \frac{\log d^{k-1}}{\lambda_1} + \frac{h_\nu - \log d^{k-1}}{\lambda_k}.$$

Cette estimation est finalement valable ν-p.p., car $\Omega := \limsup \Omega_{1/q}$ est de masse 1.

Chapitre 6

Perspectives

Nous présentons dans cette partie quelques questions liées aux travaux résumés.

Endomorphismes partiellement extrémaux

Le chapitre 1 concerne les endomorphismes dont le spectre de Lyapunov de la mesure d'équilibre est minimal, égal à $\log \sqrt{d}$. On peut se poser la question suivante.

Décrire les endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ dont une partie du spectre est minimale.

En dimension 2, cela revient à caractériser les endomorphismes d'exposants $\lambda_2 = \log \sqrt{d}$ et $\lambda_1 > \log \sqrt{d}$. Dans le cas polynomial, ils pourraient coïncider avec les applications homogènes induisant une fraction de Lattès sur la droite à l'infini. Ces applications apparaissent dans le problème des endomorphismes permutables [DS1] et sont caractérisées par la sphéricité du bord de leur bassin d'attraction en dehors d'un nombre fini de cercles [BL1]. Une approche consiste à exhiber une structure analytique dans le support de μ à l'aide des techniques de renormalisation.

Familles d'endomorphismes

L'article [MSS] initie l'étude des bifurcations d'une famille de fractions $(f_c)_{c\in M}$ sur la sphère $\mathbb{P}^1$. Ces auteurs montrent que le lieu de bifurcation est relié à l'instabilité des points critiques, et à celle du nombre de cycles attractifs. Ils montrent également que le lieu de bifurcation est d'intérieur vide.

L'exposant de Lyapunov λ_c de la mesure μ_c a été récemment introduit : l'article [DM] établit que le support du courant $T_{bif} := i\partial\bar{\partial}\lambda_c$ coïncide avec le lieu de bifurcation. Les travaux [BB1], [BB2], [DF] étudient la géométrie de T_{bif} et de ses produits $T_{bif} \wedge \ldots \wedge T_{bif}$. En particulier, les deux premiers articles montrent qu'au voisinage d'un Lattès isolé (où λ_c présente un minimum strict), il existe des paramètres possédant $2d-2$ cycles attractifs ou $2d-2$ cycles neutres, c'est à dire le maximum autorisé (théorème de Fatou-Shishikura). Les fractions de Lattès isolées apparaissent donc dans le lieu de bifurcation maximale.

Par exemple, le problème suivant se pose en dimension supérieure.

Quelles sont les bifurcations d'un endomorphisme de Lattès isolé de $\mathbb{P}^2$ *?*

Les formules reliant les sommes partielles des exposants aux multiplicateurs des cycles répulsifs (chapitre 3) sont certainement centrales pour cette question. Signalons qu'il existe sur $\mathbb{P}^2$ des endomorphismes possédant une infinité de cycles attractifs [Bd], cela pose d'importantes difficultés pour l'étude en dimension supérieure.

Automorphismes des surfaces $K3$

L'article [C] est consacré à la dynamique des automorphismes des surfaces $K3$. Une telle application possède une unique mesure d'entropie maximale $\mu = T^+ \wedge T^-$, où T^+ et T^- sont des courants laminaires respectivement dilaté et contracté. La question suivante est due à Cantat.

Caractériser les automorphismes des surfaces $K3$ *possédant une mesure* μ *absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Les exemples connus sont définis sur les surfaces de Kummer et proviennent d'applications affines sur le tore sous-jacent. Ces applications jouent le rôle des endomorphismes de Lattès sur $\mathbb{P}^k$. Une stratégie pour montrer que ce sont les seuls exemples consiste à établir l'existence d'un feuilletage holomorphe invariant [CF].

Automorphismes réguliers de $\mathbb{C}^k$

Les automorphismes réguliers ont été introduits et étudiés par Sibony [Sib]. Ce sont des applications polynomiales qui généralisent les automorphismes de Hénon ($k = 2$). Soient d et δ les degrés algébriques de f et f^{-1}. Il existe des courants positifs fermés T_+, T_- de bidegré $(1,1)$ sur $\mathbb{P}^k$ et un entier $1 \leq p \leq k-1$ tels que :

$$f^* T_+ = d\, T_+ \ , \ f_* T_- = \delta\, T_- \quad \text{et} \quad d^p = \delta^{k-p}.$$

La mesure $\mu = T_+^p \wedge T_-^{k-p}$ est alors invariante et d'entropie $h_\mu = \log d^p$. On sait de plus qu'elle est mélangante [DS3] et que ses exposants sont non nuls [dT2]. Supposons les distincts et notons les $\lambda_k < \ldots < \lambda_{p+1} < 0 < \lambda_p < \ldots < \lambda_1$. Les formules de Ledrappier-Young et Barreira-Pesin-Schmeling suggèrent la formule suivante.

A-t-on $\delta(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\log d}{\lambda_i} - \sum_{i=p+1}^{k} \frac{\log \delta}{\lambda_i}$ *pour* μ*-presque tout* $x \in \mathbb{P}^k$ *?*

Une première étape consiste à identifier les conditionnelles de μ sur les variétés instables $\mathcal{W}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{W}_p$. Ces mesures devraient coïncider avec $T_+^i \wedge [\mathcal{W}_i]$ (voir l'article de Bedford-Lyubich-Smillie [BLS1] pour le cas $k = 2$). Il s'agit ensuite de montrer que leur entropie est égale à $\log d^i$. Notons que ce problème rejoint celui de l'étude des conditionnelles de $\mu = T^k$ pour les endomorphismes de $\mathbb{P}^k$.

Chapitre 7

Travaux présentés

[D1] C. Dupont, *Exemples de Lattès et domaines faiblement sphériques de* $\mathbb{C}^n$*,* Manuscripta Math., **111,** (2003), no. 3, 357-378.

[DD] T.C. Dinh, C. Dupont, *Dimension de la mesure d'équilibre d'applications méromorphes,* J. Geom. Anal., **14** (2004), no. 4, 613-627.

[BeD] F. Berteloot, C. Dupont, *Une caractérisation des exemples de Lattès de* $\mathbb{CP}^k$ *par leur mesure de Green,* Comment. Math. Helv., **80** (2005), no. 2, 433-454.

[D2] C. Dupont, *Formule de Pesin et applications méromorphes,* Bull. Braz. Math. Soc., **37,** (2006), no. 3, 393-418.

[BDM] F. Berteloot, C. Dupont, L. Molino, *Poincaré-Dulac theorem for random families of contractions and applications to holomorphic dynamics,* Ann. Inst. Fourier, **58** (2008), no. 6, 2137-2168.

[D3] C. Dupont, *Bernoulli coding map and almost-sure invariance principle for endomorphisms of* $\mathbb{CP}^k$*,* Probab. Theory Relat. Fields, **146,** (2010), no. 3, 337-359.

[D4] C. Dupont, *On the dimension of invariant measures of endomorphisms of* $\mathbb{CP}^k$*,* à paraître dans Math. Ann..

Prépublications :

[D5] C. Dupont, *Large entropy measures for endomorphisms of* $\mathbb{CP}^k$*,* (2009).

Bibliographie

[AR] L.M. Abramov, V.A. Rohlin, *Entropy of a skew product of mappings with invariant measure,* Vestnik Leningrad. Univ., **17** (1962), no. 7, 5-13 and Amer. Math. Soc. Transl. (2) **48** (1966), 255-265.

[BPS] L. Barreira, Y. Pesin, J. Schmeling, *Dimension and product structure of hyperbolic measures,* Ann. of Math. (2), **149** (1999), no. 3, 755-783.

[BB1] G. Bassanelli, F. Berteloot, *Bifurcation currents in holomorphic dynamics on* $\mathbb{CP}^k$*,* J. Reine Angew. Math., **608** (2007), 201-235.

[BB2] G. Bassanelli, F. Berteloot, *Lyapunov exponents, bifurcation currents and laminations in bifurcation loci,* Math. Ann., **345** (2009), 1-23.

[BLS1] E. Bedford, M. Lyubich, J. Smillie, *Polynomial diffeomorphisms of* $\mathbb{C}^2$*. IV : The measure of maximal entropy and laminar currents,* Invent. Math., **112** (1993), no. 1, 77-125.

[BLS2] E. Bedford, M. Lyubich, J. Smillie, *Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of* $\mathbf{C}^2$, Invent. Math., **114** (1993), no. 2, 277-288.

[BeD] F. Berteloot, C. Dupont, *Une caractérisation des exemples de Lattès de* $\mathbb{CP}^k$ *par leur mesure de Green,* Comment. Math. Helv., **80** (2005), no. 2, 433-454.

[BDM] F. Berteloot, C. Dupont, L. Molino, *Poincaré-Dulac theorem for random families of contractions and applications to holomorphic dynamics,* Ann. Inst. Fourier, **58** (2008), no. 6, 2137-2168.

[BL1] F. Berteloot, J.J. Loeb, *Spherical hypersurfaces and Lattès rational maps,* J. Math. Pures et App. (9), **77** (1998), no. 7, 655-666.

[BL2] F. Berteloot, J.J. Loeb, *Une caractérisation géométrique des exemples de Lattès de* $\mathbb{CP}^k$*,* Bull. Soc. Math. Fr., **129** (2001), no. 2, 175-188.

[BdM] I. Binder, L. DeMarco, *Dimension of pluriharmonic measure and polynomial endomorphisms of* $\mathbf{C}^n$*,* Int. Math. Res. Not., **11** (2003), 613-625.

[Bo1] R. Bowen, *Topological entropy for noncompact sets,* Trans. Amer. Math. Soc., **184**, (1975), 125-136.

[Bo2] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms,* Lecture Notes in Math., **470**, (1975).

[Br] J.Y. Briend, *La propriété de Bernoulli pour les endomorphismes de* $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, Ergodic Theory Dynamical Systems, **22** (2002), no. 2, 323-327.

[BD1] J.Y. Briend, J. Duval, *Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de* $\mathbb{CP}^k$*,* Acta Math., **182** (1999), no. 2, 143-157.

[BD2] J.Y. Briend, J. Duval, *Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de* $\mathbb{CP}^k$*,* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **93** (2001), 145-159 (avec l'erratum dans **109** (2009), 295-296).

[BK] M. Brin, A. Katok, *On local entropy,* Lecture Notes in Math., **1007**, (1983).

[Bd] G. Buzzard, *Infinitely many periodic attractors for holomorphic maps of* 2 *variables,* Ann. of Math. (2) **145** (1997), no. 2, 389–417.

[Bu] J. Buzzi, *Hyperbolicity from entropies,* Saint-Flour Lecture Notes, en préparation.

[C] S. Cantat, *Dynamique des automorphismes des surfaces K3,* Acta Math., **187** (2001), 1-57.

[CF] S. Cantat, C. Favre, *Symétrie birationnelles des surfaces feuilletées,* J. Reine Angew. Math., **561**, (2003), 199-235.

[CL] S. Cantat, S. Leborgne, *Théorème limite central pour les endomorphismes holomorphes et les correspondances modulaires,* Int. Math. Res. Not., **56** (2005), 3479-3510 (avec l'erratum).

[CG] J.-R. Chazottes, S. Gouëzel, *On almost-sure versions of classical limit theorems for dynamical systems,* Probab. Theory Related Fields, **138** (2007), no. 1-2, 195-234.

[DM] L. DeMarco, *Dynamics of rational maps : Lyapunov exponents, bifurcations, and capacity,* Math. Ann. **326** (2003), no. 1, 43–73.

[DP] M. Denker, W. Philipp, *Approximation by Brownian motion for Gibbs measures and flows under a function,* Ergodic Theory Dynamical Systems, **4** (1984), no. 4, 541-552.

[dT1] H. de Thélin, *Un phénomène de concentration de genre,* Math. Ann. **332** (2005), no. 3, 483–498.

[dT2] H. de Thélin, *Sur les exposants de Lyapounov des applications méromorphes,* Invent. Math. **172** (2008), no. 1, 89–116.

[Di] T.C. Dinh, *Attracting current and equilibrium measure for attractors on* $\mathbb{P}^k$*,* J. Geom. Anal. **17** (2007), no. 2, 227-244.

[DD] T.C. Dinh, C. Dupont, *Dimension de la mesure d'équilibre d'applications méromorphes,* J. Geom. Anal., **14** (2004), no. 4, 613-627.

[DNS] T.C. Dinh, V.A. Nguyen, N. Sibony, *Exponential estimates for plurisubharmonic functions and stochastic dynamics,* à paraître dans J. Diff. Geom..

[DS1] T.C. Dinh, N. Sibony, *Sur les endomorphismes holomorphes permutables de $\mathbb{P}^k$,* Math. Ann., **324** (2002), no. 1, 33-70.

[DS2] T.C. Dinh, N. Sibony, *Dynamique des applications d'allure polynomiale,* J. Math. Pures Appl. (9), **82** (2003), no. 4, 367-423.

[DS3] T.C. Dinh, N. Sibony, *Dynamics of regular birational maps in $\mathbb{P}^k$,* J. Funct. Anal. **222,** (2005), no. 1, 202-216.

[DS4] T.C. Dinh, N. Sibony, *Decay of correlations and central limit theorem for meromorphic maps,* Comm. Pure Appl. Math. **59,** (2006), no. 5, 754-768.

[DS5] T.C. Dinh, N. Sibony, *Super-potentials of positive closed currents, intersection theory and dynamics,* Acta Math., **203** (2009), no. 1, 1-82.

[DS6] T.C. Dinh, N. Sibony, *Equidistribution speed for endomorphisms of projective spaces,* Math. Ann., **347** (2010), no. 3, 613-626.

[DS7] T.C. Dinh, N. Sibony, *Dynamics in several complex variables : endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings,* à paraître dans Lecture Notes in Math..

[DF] R. Dujardin, C. Favre, *Distribution of rational maps with a preperiodic critical point,* Amer. J. Math., **130**, (2008), 979-1032.

[D1] C. Dupont, *Exemples de Lattès et domaines faiblement sphériques de $\mathbb{C}^n$,* Manuscripta Math., **111**, (2003), no. 3, 357-378.

[D2] C. Dupont, *Formule de Pesin et applications méromorphes,* Bull. Braz. Math. Soc., **37**, (2006), no. 3, 393-418.

[D3] C. Dupont, *Bernoulli coding map and almost-sure invariance principle for endomorphisms of $\mathbb{P}^k$,* Probab. Theory Relat. Fields, **146**, (2010), no. 3, 337-359.

[D4] C. Dupont, *On the dimension of invariant measures of endomorphisms of $\mathbb{P}^k$,* à paraître dans Math. Ann..

[D5] C. Dupont, *Large entropy measures for endomorphisms of $\mathbb{CP}^k$,* (2009).

[FS] J.E. Fornaess, N. Sibony, *Complex Dynamics in higher dimensions,* in Complex potential theory (Montréal, PQ, 1993), NATO ASI series Math. and Phys. Sci., **439**, Kluwer Acad. Publ. (1994), 131-186.

[FSt] J.E. Fornaess, B. Stensones, *Stable manifolds of holomorphic hyperbolic maps,* Internat. J. Math., **15,** (2004), no. 8, 749–758.

[Go] S. Gouëzel, *Almost sure invariance principle for dynamical systems by spectral methods,* arXiv 0907.1404 (2009).

[Gr] M. Gromov, *On the entropy of holomorphic maps,* Enseign. Math. (2) **49** (2003), no. 3-4, 217–235.

[GK] M. Guysinsky, A. Katok, *Normal forms and invariant geometric structures for dynamical systems with invariant contracting foliations,* Math. Res. Lett., **5** (1998), no. 1-2, 149-163.

[HPS] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds,* Lecture Notes in Math., **583**, (1977).

[HR] C. Hoffman, D. Rudolph, *Uniform endomorphisms which are isomorphic to a Bernoulli shift,* Ann. of Math. (2) **156** (2002), no. 1, 79-101.

[HP] J.H. Hubbard, P. Papadopol, *Superattractive fixed points in* $\mathbb{C}^n$*,* Indiana Univ. Math. J., **43** (1994), no. 1, 321-365.

[I] I.A. Ibragimov, *Some limit theorems for stationary processes,* Theory Prob. Appl, **7** (1962), no. 4, 349-382

[J] M. V. Jakobson, *Markov partitions for rational endomorphisms of the Riemann sphere,* Multicomponent random systems, pp. 381–396, Adv. Probab. Related Topics, 6, Dekker, New York, 1980.

[JV] M. Jonsson, D. Varolin, *Stable manifolds of holomorphic diffeomorphisms,* Invent. Math. **149** (2002), no. 2, 409-430.

[KH] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems,* Cambridge Univ. Press, 1995.

[KS] A. Katok, R. Spatzier, *Nonstationary normal forms and rigidity of group actions,* Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc., **2** (1996), no. 3, 124-133.

[La] S. Lattès, *Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions rationnelles,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **166** (1918), 26-28.

[Le1] F. Ledrappier, *Some properties of absolutely continuous invariant measure on an interval,* Ergodic Theory Dynamical Systems, **1** (1981), no. 1, 77-93.

[Le2] F. Ledrappier, *Quelques propriétés ergodiques des applications rationnelles,* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **299** (1984), no. 1, 37-40.

[LY] F. Ledrappier, L.S. Young, *The metric entropy of diffeomorphisms. Part II : Relations between entropy, exponents and dimension.* Ann. of Math. (2) **122** (1985), no. 3, 540-574.

[LW] F. Ledrappier, P. Walters, *A relativised variational principle for continuous transformations,* J. London Math. Soc. (2) **16** (1977), no. 3, 568–576.

[Ly] M. Ju. Lyubich, *Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere,* Ergodic Theory Dynamical Systems, **3** (1983), no. 3, 351-385.

[Mañ] R. Mañé, *The Hausdorff dimension of invariant probabilities of rational maps,* Lecture Notes in Math., **1331**, Springer, 1988.

[MSS] R. Mañé, P. Sad, D. Sullivan, *On the dynamics of rational maps,* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **16** (1983), no. 2, 193–217.

[May] V. Mayer, *Comparing measures and invariant line fields,* Ergodic Theory Dynamical Systems, **22** (2002), no. 2, 555-570.

[MN] I. Melbourne, M. Nicol, *Almost sure invariance principle for nonuniformly hyperbolic systems,* Comm. Math. Phys., **260** (2005), no.1, 131-146.

[M] J. Milnor, *On Lattès maps,* Dynamics on the Riemann sphere, 9–43, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.

[MP] M. Misiurewicz, F. Przytycki, *Topological entropy and degree of smooth mappings,* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **25** (1977), no. 6, 573–574.

[N1] S. E. Newhouse, *Entropy and volume,* Ergodic Theory Dynamical Systems 8^* (1988), 283–299.

[N2] S. E. Newhouse, *Continuity properties of entropy,* Ann. of Math. (2) **129** (1989), no. 2, 215–235.

[Pe1] Ja. B. Pesin, *Characteristic Lyapounoff exponents and smooth ergodic theory,* Russ. Math. Surveys, **32** (1977), no. 4, 55-114.

[Pe2] Y. B. Pesin, *Dimension theory in dynamical systems,* Chicago Lectures in Math. Series, 1997.

[Pet] H. Peters, *Perturbed basins of attraction,* Math. Ann., **337** (2007), no. 1, 1-13.

[Ph] N.M. Pham, *Lyapunov exponents and bifurcation current for polynomial-like maps,* arXiv 0512557 (2005).

[PS] W. Philipp, W. Stout, *Almost sure invariance principles for partial sums of weakly dependent random variables,* Mem. Amer. Math. Soc. 2 (1975), issue 2, no. 161.

[Po] M. Pollicott, *Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds,* London Mathematical Society Lecture Notes Series, vol. 180, C.U.P., Cambridge, 1992.

[Pr] F. Przytycki, *Hausdorff dimension of harmonic measure on the boundary of an attractive basin for a holomorphic map,* Invent. Math. **80** (1985), no. 1, 161-179.

[PUZ] F. Przytycki, M. Urbański, A. Zdunik, *Harmonic, Gibbs and Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps. I,* Ann. of Math. (2), **130** (1989), no. 1, 1-40.

[RR] J.P. Rosay, W. Rudin, *Holomorphic maps from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$*. Trans. Amer. Math. Soc., **310** (1988), no. 1, 47-86.

[R] D. Ruelle, *An inequality for the entropy of differentiable maps,* Bol. Soc. Brasil Mat., **9** (1978), no. 1, 83-87.

[Sa] G. Sabiini, *Suites de contractions holomorphes et domaines de Fatou-Bieberbach,* thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, 2010.

[Sib] N. Sibony, *Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$,* in Dynamique et Géométrie Complexes, Panoramas et Synthèses **8**, SMF, 1999.

[Sin] Y. G. Sinai, *The central limit theorem for geodesic flows on manifolds of constant negative curvature,* Soviet Math. Dokl., **1** (1960), 983-987.

[Wa] P. Walters, *An introduction to ergodic theory,* Springer, 1982.

[Wo] E. F. Wold, *Fatou-Bieberbach domains,* Internat. J. Math., **16** (2005), no. 10, 1119–1130.

[Y] L.S. Young, *Dimension, entropy and Lyapounov exponents,* Ergodic Theory & Dynamical Systems, **2** (1982), no. 1, 109-124.

[Z] A. Zdunik, *Parabolic orbifolds and the dimension of the maximal measure for rational maps,* Invent. Math., **99** (1990), no. 3, 627-649.