



Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.A.S.S. 2014-2015

Feuilles de TD du cours d'Algèbre S4

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

Email: bardet@univ-paris1.fr

Page oueb: <http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet->

Feuille n° 1:

Rappels d'algèbre linéaire

- (1) (*) Justifier si les espaces suivants sont des espaces vectoriels (réels), pour les additions et les multiplications par un scalaire usuelles.
- $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2y^2 = 0\}$.
 - $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x - 2y + 2z = 1\}$.
 - $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 0\}$.
 - $E_4 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = -f(-1)\}$.
 - $E_5 = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 \leq u_2\}$.
 - $E_6 = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \text{ pour } n \in \mathbb{N}\}$.
- (2) (**) Dans \mathbb{R}^3 on considère les vecteurs $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (-1, 3, -1)$, $u_3 = (1, 1, -1)$ et $u_4 = (0, 0, -3)$.
- (a) La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre? Est-elle une famille génératrice de \mathbb{R}^3 ? Quel est son rang? Mêmes questions pour (u_1, u_2, u_3, u_4) .
- (b) Montrer que $b = (u_1, u_2, u_4)$ est une base de \mathbb{R}^3 . Soit $u = (x, y, z)$, déterminer les coordonnées de u dans b . Donner les coordonnées de u_3 puis de u_2 dans b .
- (3) (**) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application f définie sur E tel que $f(P) = Q$ où $Q(X) = (1 - X)P'(X) - 2P'(X)$.
- (a) Montrer que f est une application linéaire de E dans E .
- (b) Déterminer le noyau et l'image de f ainsi que leurs dimensions.
- (c) Montrer que la famille $b = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de E , où $b_1(X) = 1$, $b_2(X) = X$, $b_3(X) = X^2 - 1$. Exprimer $f(b_i)$ pour $i = 1, \dots, 4$ dans la base b . En déduire la matrice de f dans b .
- (4) (**) Soit $E = \mathbb{R}^2$ de base $e = (e_1, e_2)$, où e_1 et e_2 sont deux vecteurs de E . On considère l'application f telle que pour tout $x = x_1e_1 + x_2e_2$ où $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on ait $f(x) = (x_1 - 2x_2)e_1 + (4x_2 - 2x_1)e_2$.
- (a) f est linéaire : pourquoi ? Déterminer la matrice de f dans e .
- (b) On pose $e'_1 = 2e_2 - e_1$ et $e'_2 = e_1 + e_2$. Montrer que $e' = (e'_1, e'_2)$ est une base de E .
- (c) Déterminer les matrices $Mat(f, e, e')$ et $Mat(f, e', e)$, puis la matrice de f dans e' .
- (5) (**) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On considère l'application u qui à tout polynôme de E associe la somme des coefficients de ce polynôme.
- (a) Montrer que u est une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$, dont vous préciserez F .
- (b) Quelle est sa matrice par rapport aux bases canoniques ?
- (c) Déterminer le noyau et l'image de u .
- (6) (*) Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 définie par $f(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z)$. Quelle est la matrice de f par rapport aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^2 ? On pose $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (0, -1, 0)$ et $u_3 = (2, 0, 2)$, ainsi que $v_1 = (-1, 3)$ et $v_2 = (-2, -1)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) (resp. (v_1, v_2)) forme une base de \mathbb{R}^3 (resp. \mathbb{R}^2). Donner la matrice de f relativement à ces deux bases.
- (7) (**) Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre 2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
- (a) Soit f l'application qui à tout vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^2$ associe $A.X$. Montrer que f est linéaire. Quels sont son noyau, son image et son rang?
- (b) Soit g l'application qui à toute matrice $M \in E$ associe $A.M$. Montrer que g est linéaire. Quels sont son noyau, son image et son rang?
- (c) Déterminer la matrice de g relativement à la base canonique $m = (m_1^1, m_2^1, m_1^2, m_2^2)$ de E où:
 $m_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $m_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $m_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $m_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (on montrera auparavant que m est bien une base de E).

(8) (*) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 2 & 5 & a+1 \\ 3 & 6 & a+2 \end{pmatrix},$$

où $a \in \mathbb{R}$. Calculer A^2 , puis le déterminant de A et donner sa matrice inverse lorsque celle-ci existe.

(9) (**) Soit la matrice $A_n = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ définie par $a_{i+1, i} = 1$, pour $i = 1, \dots, n-1$, $a_{i, i+1} = 1$, pour $i = 1, \dots, n-1$ et sinon $a_{ij} = 0$. On note Δ_n le déterminant de A_n .

(a) Pour $n = 2$, écrire A_2 et calculer Δ_2 .

(b) Pour $n = 3$, écrire A_3 et calculer Δ_3 .

(c) Pour n quelconque, calculer Δ_n en cherchant une relation de récurrence.

(10) (*) Soit les deux matrices réelles suivantes, que l'on pourra considérer comme les matrices d'endomorphismes de \mathbb{R}^2 dans la base $e = ((1, 0), (0, 1))$.

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune d'entre elles,

(a) Calculer les valeurs propres.

(b) Déterminer les sous-espaces propres associés.

(c) La matrice est-elle diagonalisable ?

(d) Si oui, écrire explicitement la matrice sous la forme $P^{-1}DP$ où D est une matrice diagonale.

(e) Calculer $f^n(1, 1)$ si $f(x, y) = (-x + 2y, 2x + 2y)$.

(11) (**) Soit la matrice

$$M = \text{Mat}(u, e, e) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ -2 & 1 & -6 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer ses valeurs propres.

(b) Déterminer les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

(c) Calculer M^n .

(12) (**) Mêmes questions avec M la matrice suivante:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

(13) (***) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) En tant que matrice réelle, est-ce que M est diagonalisable?

(b) Considérer maintenant M comme une matrice à coefficients complexes. Diagonaliser M .

(c) En déduire M^n (qui doit être une matrice réelle).

(14) (**) Écrire en fonction de n , u_0 et v_0 les termes généraux u_n et v_n de deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les équations de récurrence

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + v_n. \end{cases}$$

Indication : on peut utiliser une écriture matricielle $\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$, où M est une matrice à préciser.

Feuille n° 2:

Produits scalaires et applications

- (1) (***) Soit E un espace vectoriel. Déterminer parmi les applications $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ de $E \times E$ dans \mathbb{R} suivantes, celles qui correspondent à un produit scalaire sur E .
- (a) $E = \mathbb{R}$, $\langle x, x' \rangle = -2xx'$ puis $\langle x, x' \rangle = 4(x + x')(x - x')$.
- (b) $E = \mathbb{R}^2$, $\langle (x, y), (x', y') \rangle = 4xx' - yy'$, puis $\langle (x, y), (x', y') \rangle = 3xx' + 2yy'$, $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - 6xy' + 6x'y - 9yy'$ et $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' - xy' - yx' + 4yy'$.
- (c) $E = \mathbb{R}_1[X]$ et $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(1) + P(1)Q(0) + 2P(0)Q(0)$.
- (d) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + 2P(2)Q(2)$.
- (e) $E = \mathcal{C}^0([0, 2], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 2]$ à valeurs réelles et pour $f, g \in E$, $\langle f, g \rangle = \int_0^2 t^2 f'(t)g'(t)dt$.
- (2) (*) Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de nombres réels. A quelles conditions sur $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, l'application $(x, y) \in E^2 \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i$ est-elle un produit scalaire (où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$)? Existe-t-il des produits scalaires sur E qui ne s'écrivent pas sous la forme $(x, y) \in E^2 \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i$?
- (3) (***) Soit $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que l'application $(x, y) \in E \mapsto |x| + 2|y|$ est une norme, mais n'est pas la norme d'un produit scalaire.
- (4) (***) Soit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille p à coefficients réels. Montrer que si M et M' sont des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, l'application $(M, M') \mapsto \text{Trace}(M^t M')$ est un produit scalaire, où M^t est la transposée de M et $\text{Trace}(A)$ est la somme des termes diagonaux d'une matrice carrée A .
- (5) (***) Soit E l'ensemble des suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n)^2 < \infty$. Montrer que E est bien un espace vectoriel (on pourra auparavant vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$). Montrer que l'application $(u_n)_n, (v_n)_n \in E \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ existe bien, puis que c'est un produit scalaire sur E .
- (6) (***) Après avoir introduit un produit scalaire adéquat, montrer les inégalités suivantes :
- (a) pour $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^2$, $|3xx' + yy'| \leq \sqrt{3x^2 + y^2} \sqrt{3(x')^2 + (y')^2}$.
- (b) $\int_1^2 t^2 \ln t e^t dt \leq (\int_1^2 t^2 e^{2t} dt)^{\frac{1}{2}} (\int_1^2 t^2 (\ln t)^2 dt)^{\frac{1}{2}} = \dots?$
- (c) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $(\int_0^\pi \sin t P(t) dt)^2 \leq \int_0^\pi P^2(t) dt$.
- (7) (*) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et pour $x = (x_1, x_2) \in E$ soit l'application
- $$N(x) = (x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2)^{1/2}.$$
- (a) Montrer que $N(x)$ existe bien pour tout $x \in E$.
- (b) Montrer que $N(x)$ est une norme associée à un produit scalaire que l'on précisera.
- (c) Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
- (d) Soit $F = \{x = (x_1, x_2) \in E, x_1 + 2x_2 = 0\}$. Montrer que F est un s.e.v. de E , puis déterminer une base orthonormale (pour le produit scalaire précédent) de F et déterminer F^\perp .
- (8) (***) On considère $E = \mathbb{R}^3$ canonique muni du produit scalaire euclidien usuel et $e = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit $a = (-1, 1, 3)$ et $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in E, x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \text{ et } x_1 = -x_2\}$.
- (a) Montrer que F est un s.e.v. de E dont on précisera une base dans e et la dimension.
- (b) Déterminer une base orthonormale de F . En déduire pour $x \in E$, $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F .
- (c) Déterminer F^\perp . Calculer de deux manières différentes pour $x \in E$, $p_{F^\perp}(x)$ la projection orthogonale de x sur F^\perp .
- (d) Calculer $d(a, F)$.
- (9) (***) Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} muni du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

- (a) Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel F de E engendré par f_1, f_2 définies par $f_1(x) = 1, f_2(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$.
- (b) Déterminer la projection orthogonale sur F de $f : x \mapsto \cos(\pi x), x \in [0, 1]$.
- (10) (**) On note P_F un projecteur orthogonal sur F où F est un sev d'un espace vectoriel euclidien E muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que si G est un sev de F , alors pour tout $x \in E$, $\|P_G(x)\| \leq \|P_F(x)\|^2$.
- (11) (***) Soit P un projecteur sur F parallèlement à G , où F et G sont deux sev en somme directe d'un espace vectoriel euclidien E (c'est-à-dire que $P(x_F + x_G) = x_F$ pour tout $x_F \in F, x_G \in G$). Montrer que si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ avec $\|\cdot\|$ une norme euclidienne de E , alors P est un projecteur orthogonal (soit F orthogonal à G).
- (12) (**) Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$.
- (a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)dx$.
- (b) On considère le sous-espace $F = \mathbb{R}_2[X]$ de E . Trouver une base orthogonale de F (polynômes de Tchébycheff de première espèce).
- (c) Quelle est la meilleure approximation de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
- (13) (**) Calculer le minimum sur \mathbb{R}^2 de $f(a, b) = \int_{-1}^1 (e^x - ax - b)^2 dx$. *Indication*: On pourra penser à une projection après avoir introduit le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$.
- (14) (****) Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} muni du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F = \mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales et soit $g(x) = e^x$ pour $x \in [0, 1]$.
- (a) Montrer que $g \notin F$.
- (b) Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales (à préciser) convergeant vers g pour la norme euclidienne. En déduire que $F^\perp = \{0\}$.
- (15) (*) Montrer que toutes les formes linéaires sur $E = \mathbb{R}^n$ s'écrivent $f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ avec a_1, \dots, a_n des réels fixés.
- (16) (*) Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $x_1, x_2 \in E$. Montrer que l'application $x \in E \mapsto 2\langle x_1, x \rangle - \langle x, x_2 \rangle$ est une forme linéaire sur E . Déterminer son noyau. Et l'application $x \in E \mapsto \langle x, x_2 + 2x \rangle$?
- (17) (**) Soit $E = \mathbb{R}^2[X]$. Montrer que l'application $P \in E \mapsto P(0) + P'(0)$ est une forme linéaire sur E ? Quel est son noyau?
- (18) (**) Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$, ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. Montrer que $f \in E \mapsto f(0)$ est une forme linéaire sur E . Déterminer son noyau lorsque E se réduit à l'ensemble des polynômes de degré inférieur à 1 définis sur $[0, 1]$.
- (19) (**) On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ où (a_1, \dots, a_n) sont des réels donnés non tous nuls. Ecrire H sous la forme du noyau d'une forme linéaire. En déduire la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n de la projection orthogonale sur H .
- (20) (*) Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien classique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit f l'application telle que $f(x_1, \dots, x_n) = x_{n-1} - 2x_n$. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in E$ tel que $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$ pour tout $x \in E$. Que vaut x_0 ?
- (21) (**) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P_0 \in E$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait $P(1) - 2P(0) = \int_{-1}^1 P_0(t)P(t)dt$. Calculer P_0 dans le cas où $n = 1$.
- (22) (***) Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$. L'application $u : f \in E \mapsto f(1) - f(0)$ est-elle une forme linéaire sur E ? Sur E on associe le produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Peut-on trouver $g_0 \in E$ telle que $u(f) = \langle f, g_0 \rangle$ pour tout $f \in E$? Si on considère maintenant le s.e.v. $F_n = \mathbb{R}^n[X]$ de E et le même produit scalaire avec $g \in F_n$, est-ce possible cette fois?

Feuille n° 3:

Une application en analyse: les séries de Fourier

- (1) (*) Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction $f : x \in [-\pi, \pi] \mapsto \sin^3(x)$.
- (2) (*) Soit f une fonction T -périodique, continue par morceaux. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$.
- (3) (*) Soit f la fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} définie sur $] -\pi, \pi[$ par $f(x) = -2x$ et par $f(\pi) = 0$. Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$. Développer f en série de Fourier. La fonction f coïncide-t-elle avec la somme de sa série de Fourier en tous points de $[-\pi, \pi]$? Etudier le cas particulier de $x = 0$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir à partir de ce développement en série de Fourier?
- (4) (**) Soit f la fonction impaire sur $[-\pi, \pi]$ telle que $f(x) = e^x - 1$ sur $[0, \pi]$. Tracer f sur $[-\pi, \pi]$. Montrer que f admet un développement en série de Fourier et le préciser. Quelles séries peut-on calculer en utilisant ce développement en 0? en π ? En utilisant le Théorème de Bessel, quelle autre somme de série numérique peut-on facilement obtenir?
- (5) (**) On considère la fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.
- Tracer f sur $[-4\pi, 4\pi]$.
 - Calculer les coefficients de Fourier de f .
 - Quelle est la nature de la série de Fourier S_f de f ?
 - Déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.
- (6) (**) Déterminer la série de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = |\cos(x)|$ pour $x \in [-\pi, \pi]$. Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire en utilisant le Théorème de Dirichlet, puis en utilisant le Théorème de Bessel?
- (7) (**) Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π -périodique impaire f définie par $f(x) = \min(\cos x, -\sin x)$ pour $x \in [0, \pi]$. Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire en utilisant le Théorème de Dirichlet, puis en utilisant le Théorème de Bessel?
- (8) (*****) Montrer que si une série trigonométrique converge uniformément sur $[0, \pi]$, alors elle est identique à la série de Fourier de sa somme. Donner la série de Fourier d'un polynôme trigonométrique. Montrer que la série trigonométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur \mathbb{R} . En utilisant la formule de Parseval, montrer qu'elle est différente de la série de Fourier de sa somme.

Feuille n° 4:

Application linéaire adjointe et réduction des matrices symétriques et orthogonales

- (1) (*) On considère l'espace vectoriel R^3 muni du produit scalaire canonique, et $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_3 = 0\}$.
- Préciser une base orthonormale de F .
 - Déterminer F^\perp , l'orthogonal de F . Préciser une base orthonormale de F^\perp .
 - Donner l'expression de p_F , la projection orthogonale sur F . Préciser les images par p_F des vecteurs de la base définie précédemment. Déterminer l'application adjointe de p_F .
 - Pour $x \in \mathbb{R}^3$ donné, calculer $d(x; F)$.
- (2) (**) Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(P) = Q$, avec $Q(x) = P(x) - P'(x)$ pour tout $P \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Déterminer u^* pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ puis pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0)$.
- (3) (**) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $1 \leq p \leq n - 1$. Soit p_F la projection orthogonale sur F .
- Rappeler la définition de p_F .
 - Soit s_F l'endomorphisme de E tel que $s_F(x) = 2p_F(x) - x$. Montrer que s est une isométrie et déterminer son application réciproque. On appelle s_F symétrie orthogonale sur F . Pourquoi?
 - En déduire que p_F est un endomorphisme symétrique.
- (4) (**) Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ des isométries d'un espace euclidien E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que $u \circ v$ est une isométrie. Déterminer l'application réciproque de $u \circ v$. Et $u + v$ est-elle une isométrie?
- (5) (***) Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si u et son adjoint u^* commutent (c'est-à-dire $u \circ u^* = u^* \circ u$).
- Soit u normal. Montrer que si F est un sous-espace propre de u alors F^\perp est stable par u . En déduire que u est diagonalisable dans une base orthonormale. La réciproque est-elle vraie ?
 - Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes:
 - u est normal.
 - $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
 - Tout sous-espace vectoriel stable par u est stable par u^* .
 - Si un sous-espace vectoriel F est stable par u alors F^\perp est stable par u .
- (6) (**) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^2 = -Id_E$. Montrer que f est un endomorphisme orthogonal de E .
- (7) (***) Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que $f^2 = Id$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
- f est une symétrie orthogonale.
 - f est symétrique ($f^* = f$ c'est à dire pour tout $x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$).
 - f est une transformation orthogonale *i.e.* préserve le produit scalaire: $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
- (8) (**) Soit E un espace euclidien et $u : E \mapsto E$ telle que pour tout $x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$. Montrer que pour tout $x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. En déduire que u est une application linéaire orthogonale. Soit $f : E \mapsto E$ telle que pour tout $x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Montrer que $f = t \circ u$ où t est une translation et u est orthogonale.
- (9) (*) Soit les matrices $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -4 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.
- Pour chacune de ces matrices,
- Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres orthonormaux associés.
 - Calculer la puissance n -ème de la matrice.

- (10) (**) Soit A et B des matrices symétriques de taille $n \geq 2$. La matrice AB est-elle une matrice symétrique? Même question en remplaçant "symétrique" par orthogonale, puis examiner le cas particulier où $B = A$.
- (11) (**) Soit A une matrice symétrique de taille n telle qu'il existe $k \geq 2$ vérifiant $A^k = A$. Montrer que $A^2 = A$.
- (12) (**) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique réelle de taille n et de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.
- (13) (***) Soit A une matrice carrée de taille n . Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe B une matrice orthogonale de taille n telle que $A = {}^t B B$.
- (14) (**) Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , étudier les endomorphismes (noyau, image, valeurs propres) représentés dans une base orthonormée par les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (15) (***) Soient a, b, c trois réels. On pose

$$M = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{c} & -\frac{1}{2} & \frac{a}{b} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que M représente une symétrie orthogonale dans une base orthonormée sur \mathbb{R}^3 .

- (16) (***) Soit A une matrice carrée de taille n . Montrer que A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe B une matrice orthogonale de taille n telle que $A = {}^t B B$.
- (17) (***) Pour a un réel, soit la matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser M dans une base orthonormale. Calculer M^n .

- (18) (***) Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ un vecteur non nul de \mathbb{R}^n , où $n \in \mathbb{N}^*$ et soit la matrice $M = X {}^t X$.
- Déterminer le rang de la matrice M (on pourra chercher le noyau de l'endomorphisme de \mathbb{R}^n représenté par M).
 - En déduire les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
 - Calculer M^n .
- (19) (***) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle telle que $A^3 + A = 0$. Montrer qu'alors $A = 0$.

Feuille n° 5 :

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

- (1) (*) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et soit ϕ l'application telle que $\phi(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2$ avec $x = (x_1, x_2) \in E$ et $y = (y_1, y_2) \in E$. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire symétrique et déterminer la forme quadratique associée.
- (2) (*) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application $\psi(x, y) = \alpha \langle x, y \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur E . A quelles conditions sur α la forme quadratique associée à ψ est-elle définie? Positive?
- (3) (*) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et u un endomorphisme sur E . Montrer que l'application $\Phi(x) = \langle x, u(x) \rangle$ pour tout $x \in E$ est une forme quadratique sur E . Déterminer l'endomorphisme associé à Φ .
- (4) (**) Soit Φ une forme quadratique définie positive sur \mathbb{R}^n . Si on note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^n , montrer qu'il existe u un automorphisme de \mathbb{R}^n tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(x) = \|u(x)\|^2$.
- (5) (**) Soit $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer l'écriture générale de toutes les formes bilinéaires symétriques sur E dans une base de E . Déterminer l'ensemble Q des formes quadratiques de E . Montrer que Q est un espace vectoriel. Soit le sous-ensemble de Q constitué par les formes quadratiques définies positives. Est-ce un sous-espace vectoriel de Q ?
- (6) (*) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et u un endomorphisme sur E . Montrer que l'application $\psi(x, y) = \langle x, u(y) \rangle + \langle y, u(x) \rangle$ pour tout $x, y \in E$ est une forme bilinéaire symétrique sur E . Déterminer la forme quadratique associée à ψ .
- (7) (**) Soit Φ une forme quadratique définie positive sur \mathbb{R}^n . Si on note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^n , montrer qu'il existe u un automorphisme de \mathbb{R}^n tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(x) = \|u(x)\|^2$.
- (8) (*) Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = x_1^2 - 2x_1x_2$ pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
 - (a) Montrer que Φ est une forme quadratique. Donner la matrice représentative de ϕ la forme bilinéaire symétrique associée à Φ dans (e_1, e_2) base canonique de \mathbb{R}^2 . ϕ est-elle dégénérée?
 - (b) Déterminer une base orthonormale pour ϕ .
 - (c) Déterminer la signature de Φ .
 - (d) Déterminer $\ker(\phi)$ et l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ .
- (9) (**) Soit $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi(M) = \det(M)$.
 - (a) Montrer que Φ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - (b) Donner la matrice représentative de ϕ , forme bilinéaire associée à Φ , dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - (c) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gauss à Φ et en déduire une base orthonormale pour Φ .
- (10) (*) On considère sur \mathbb{R}^3 la forme quadratique $q(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$.
 - (a) Montrer que q n'est pas définie positive.
 - (b) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de q .
- (11) (**) Soit $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P) = \text{Discriminant de } P$.
 - (a) Montrer que Φ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
 - (b) Donner la matrice représentative de ϕ , forme bilinéaire associée à Φ , dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - (c) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gauss à Φ et une base orthonormale de ϕ .
 - (d) Déterminer $\ker(\phi)$ et l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ .
- (12) (**) Soit E l'ensemble des fonctions impaire de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et soit $\Phi : f \in E \rightarrow \int_0^1 2f(t)f'(t)dt$. Montrer que Φ est une forme quadratique sur E . Est-elle positive? Définie? Déterminer la forme bilinéaire symétrique ϕ associée à Φ . Est-ce un produit scalaire? La famille des $(\cos(nx), \sin(nx))_{n \in \mathbb{N}}$

est-elle ϕ -orthogonale?

- (13) (***) Déterminer la signature de la forme quadratique $\Phi(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j$ pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- (14) (**) Après avoir fait un changement de repère approprié, déterminer et tracer l'ensemble des solutions dans \mathbb{R}^2 de l'équation $-x^2 + 2y^2 + 4xy = 0$.
- (15) (*) Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont positives:
- $q(x, y, z, t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$.
 - $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - $q(x, y) = (1 - \lambda)x^2 + 2\mu xy + (1 + \lambda)y^2$, où λ et μ sont des réels.
- (16) (**) Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de taille n à coefficients strictement positifs. Déterminer la signature de la forme quadratique sur \mathbb{R}^n définie par : $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x_i + x_j)^2$.
- (17) (***) Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E et q la forme quadratique associée. On pose pour $x \in E$: $\varphi(x) = q(a)q(x) - f^2(a, x)$.
- (a) Montrer que φ est une forme quadratique sur E .
 - (b) Si E est de dimension finie comparer les rangs de φ et q .
 - (c) Dans le cas général, déterminer le noyau de la forme polaire de φ en fonction de celui de f et de a .
- (18) (**) Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie et $f_1, \dots, f_p \in E^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $q = \alpha_1 f_1^2 + \dots + \alpha_p f_p^2$. Montrer que $\text{rg}(f_1, \dots, f_p) \geq \text{rg}(q)$.