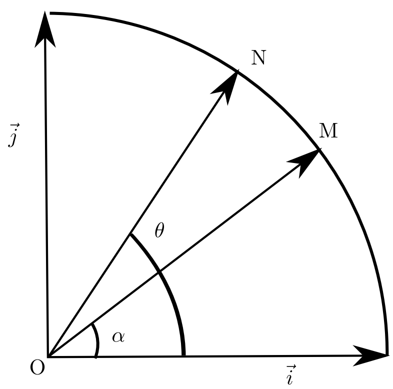
Produit scalaire

Exercice 1 (Distance euclidienne)

1. Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique ayant pour coordonnées x_1 et x_2 pour $\vec{x}$ et y_1 et y_2 pour $\vec{y}$.
   (a) Ecrire le produit scalaire euclidien (standard) entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ en fonction de leurs coordonnées.
   (b) Ecrire le produit scalaire euclidien (standard) entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ en fonction des matrices unicolonnes $X_{\mathsf{can}} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ et $Y_{\mathsf{can}} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$
   (c) Quelle est la matrice du produit scalaire euclidien standard Ψ_{can} dans la base can ?
   (d) Donner la distance $d(\vec{x}, \vec{y})$ en fonction des coordonnées.
   (e) Donner la distance $d(\vec{x}, \vec{y})$ en fonction des matrice X_{can} et Y_{can}.
2. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u}$ de longueur l_1 (dans selon la distance euclidienne classique), $\vec{v}$ de longueur l_2 (dans selon la distance euclidienne classique) et α l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Supposons pour simplifier que $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{e}_1$ le premier vecteur de la base canonique et que α est un angle aigu positif (pour faire le graphique).
   (a) Réaliser la figure avec $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   (b) Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans can (coordonnées notées U_{can} et V_{can}).
   (c) Déterminer la matrice $\Psi_{\mathcal{B}}$ du produit scalaire euclidien standard dans la base $\mathcal{B}$?
3. Prenons un *nouveau produit scalaire* noté ϕ. Ce produit scalaire est défini par sa matrice dans $\mathcal{B}$ notée $\Phi_{\mathcal{B}}$ qui vaut l'identité d'ordre 2 ($\Phi_{\mathcal{B}} = I_2$). Soit $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ayant pour coordonnées dans $\mathcal{B}$: a_1 et a_2 pour $\vec{a}$ et b_1 et b_2 pour $\vec{b}$.
   (a) Que vaut $\phi(\vec{u}, \vec{v})$? Ces vecteurs sont-ils orthogonaux au sens de ϕ ? Sont-ils orthogonaux sur le graphique ?
   (b) Ecrire le ϕ-produit scalaire entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ en fonction des matrices unicolonnes $A_{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B_{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right)$ et de $\Phi_{\mathcal{B}}$
   (c) Ecrire le produit scalaire euclidien (standard) entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ en fonction des matrices unicolonnes A_{can} et B_{can}. Avec le graphique, il ne semble pas possible d'obtenir *facilement* ces coordonnées (dans can par exemple pour des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de coordonnées $(\pi, 2/3)$ et $(-2/5, 3)$ dans $\mathcal{B}$.
   (d) En utilisant un changement de base entre can et $\mathcal{B}$ trouver les coordonnées de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans can en fonction des coordonnées de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans $\mathcal{B}$.
   (e) En utilisant ce changement de base, retrouver la matrice $\Psi_{\mathcal{B}}$ déterminée à la question **??**.
   (f) En utilisant un changement de base entre $\mathcal{B}$ et can déterminer la matrice du produit scalaire ϕ dans can

Exercice 2 (formule trigo : le retour)

Soit le graphique suivant



1. Donnez les coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ en fonction des angles α et θ.
2. Donnez le produit scalaire $\langle\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\rangle$ via la formule utilisant les longueurs des vecteurs et le cosinus de l'angle entre eux.
3. Donnez le produit scalaire $\langle\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\rangle$ via la formule utilisant les coordonnées.
4. Retrouvez la formule trigo $\cos(\theta - \alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$ [1].

Exercice 3 (Produit scalaire et matrice symétrique)
La matrice M d'un produit scalaire ϕ est-elle symétrique ?

Exercice 4 (Forme polaire)
Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique et q la forme quadratique associée, définie par $q(\vec{u}) = \phi(\vec{u}, \vec{u})$. Calculer $q(\vec{u} + \vec{v})$ et en déduire que

$$\phi(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2}\left(q(\vec{u} + \vec{v}) - q(\vec{u}) - q(\vec{v})\right).$$

Exercice 5 (To be or not to be...)
1. Considérons $E = \mathbb{R}^3$, les formes suivantes définissent-elles un produit scalaire ?

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{u}, \vec{v}) &= u_1v_1 + 3u_2v_2 + u_3v_3 \\
\phi(\vec{u}, \vec{v}) &= u_1v_1 + 3u_2v_2 - u_3v_3 \\
\phi(\vec{u}, \vec{v}) &= u_1v_1 + 2u_2v_2 + 4u_3v_3 \\
\phi(\vec{u}, \vec{v}) &= u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3 \\
\phi(\vec{u}, \vec{v}) &= 3u_1v_1 + 14u_2v_2 + 8u_3v_3 + 6u_1v_2 - 3u_1v_3 - 4u_2v_3 + 6u_2v_1 - 3u_3v_1 - 4u_3v_2. \\
\phi(\vec{u}, \vec{v}) &= u_1v_1 + 6u_2v_2 + 20u_3v_3 + 2u_1v_2 + 3u_1v_3 + 10u_2v_3 + 2u_2v_1 + 3u_3v_1 + 10u_3v_2.
\end{aligned}$$

2. Si ϕ est un produit scalaire, rappeler la matrice Φ_{can} de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Si ϕ est un produit scalaire, choisir une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de ϕ dans cette base, notée $\Phi_{\mathcal{B}}$, est diagonale. Donner cette matrice $\Phi_{\mathcal{B}}$,la matrice de passage $\mathcal{M}_{\mathsf{can},\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$ de la base $\mathcal{B}$ à la canonique et expliciter la relation entre $\Phi_{\mathcal{B}}$ et Φ_{can}.

Exercice 6 (Inégalités classiques)
1. Démontrer l'inégalité de Cauchy -Schwarz :

$$| < \vec{x}, \vec{y} > | \leq ||\vec{x}|| \times ||\vec{y}||.$$

2. En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||.$$

3. Quand y a-t-il égalité dans ces inégalités ?

Exercice 7 (Distances classiques)
Considérons les trois distances classiques de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
d_2(\vec{x}, \vec{y}) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\
d_1(\vec{x}, \vec{y}) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\
d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.
\end{aligned}$$

Dessiner l'ensemble des points situés à distance 1 de l'origine.

Exercice 8 (Produit scalaire avec paramètre)
Considérons l'application

$$\phi(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_1 + 6u_2v_2 + au_3v_3 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1 - 3u_1v_3 - 3u_3v_1,$$

où a est un scalaire.

1. voir `http://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/Trigo-sans-pleurs.pdf`

1. Déterminez a pour que $\phi(\vec{u}, \vec{v})$ définisse un produit scalaire.
2. Donnez la matrice M de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. On fixe $a = 28$. Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans la base canonique. On considère le changement de variable

$$\begin{cases} X = x - 2y - 3z \\ Y = y - 3z \\ Z = z \end{cases}$$

et on note $\mathcal{B} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ la base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle u a pour coordonnées (X, Y, Z).

(a) Exprimer une matrice de passage (de sens bien choisi) entre $\mathcal{B}$ et can.

(b) Exprimer la forme quadratique q associée à ϕ en fonction de (X, Y, Z).

(c) Quelle est la matrice de ϕ par rapport à $\mathcal{B}$? On notera $\tilde{M}$ cette matrice.

(d) Calculer la base $\mathcal{B}$.

(e) Donner une relation entre M et $\tilde{M}$.