Orthogonalité

Exercice 1
Considérons $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique.

1. Vérifier que les vecteurs $\vec{v}_1 = (1,1,1)'$, $\vec{v}_2 = (-1,1,0)'$ et $\vec{v}_3 = (1,1,-2)'$ forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.
2. Soient $\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$, $\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$, et $\vec{u}_3 = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|}$, montrer que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
3. Trouver les coordonnées dans la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ des vecteurs suivants $\vec{x}_1 = (3,-1,1)'$, $\vec{x}_2 = (-1,1,1)'$, $\vec{x}_3 = (2,1,-2)'$, $\vec{x}_4 = (2,-3,1)'$, $\vec{x}_5 = (1,0,0)'$ et $\vec{x}_6 = (0,1,-2)'$.

Exercice 2
Considérons $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique et F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\vec{f}_1 = (1,1,1)'$ et $\vec{f}_2 = (1,2,-1)'$. Construisez un base orthonormée de F.

Exercice 3
Considérons E engendré par $\vec{e}_1 = (1,1,1)'$ et $\vec{e}_2 = (-1,2,-1)'$ et $\vec{e}_3 = (0,1,2)'$. Construisez un base orthonormée de E.

Exercice 4
Soit can la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (espace euclidien muni du produit scalaire euclidien standard), on note u_{can} et v_{can} les coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E dans $\mathcal{B}$. Soit f tel que $A = M_{\mathsf{can},\mathsf{can}}(f)$ soit symétrique.

1. Ecrire $< \vec{u}, \vec{v} >$ en fonction de u_{can} et v_{can}.
2. Ecrire $< f(\vec{u}), \vec{v} >$ en fonction de u_{can}, A et v_{can}.
3. En déduire
$$< f(\vec{u}), \vec{v} > = < \vec{u}, f(\vec{v}) > .$$
4. Déduire de la question précédente que 2 vecteurs propres associés à 2 valeurs propres distinctes de A symétrique sont orthogonaux.

Exercice 5
Considérons $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$ une base orthonormée d'un espace euclidien E, considérons un élément $\vec{u}$ de E. Montrer que si $\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{e}_i$ alors
$$\|\vec{u}\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2.$$

Exercice 6
Considérons $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique et F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\vec{f}_1 = (1,1,1)'$ et $\vec{f}_2 = (1,2,-1)'$. Donnez la matrice de la projection orthogonale sur F et la matrice de la projection orthogonale sur $F^\perp$.

Exercice 7
Considérons $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, donnez la matrice de la projection orthogonale sur la droite engendrée par le vecteur $(1,1,1)'$, notée $\pi_{\mathbb{1}}^\perp$ et la matrice de la projection orthogonale sur son complément notée $\pi_{\mathbb{1}^\perp}^\perp$. Soit $\vec{u}$ un élément de $\mathbb{R}^3$, que faites vous quand vous calculez $\pi_{\mathbb{1}}^\perp(\vec{u})$ et $\pi_{\mathbb{1}^\perp}^\perp(\vec{u})$?

Exercice 8
Nous avons n individus. Pour chaque individu, nous mesurons p valeurs représentant des valeurs de variables différentes, par exemple, l'âge, le poids, la taille, temps de travail, assiduité au cours d'algèbre ... (notées de X_1 à X_p). Nous mesurons ensuite une dernière variable comme par exemple la note en analyse notée Y, dont nous pensons qu'elle est liée aux autres variables de manière linéaire. Considérons $E = \mathbb{R}^n$ et F le sous-espace engendré par X_1, ..., X_p. Donnez la matrice de projection sur F.

Exercice 9

Soit $n \geq 1$ un entier fixé, considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Soient $t_0, t_1, \ldots, t_n$, $n+1$ nombres réels distincts fixés. Pour P et Q deux éléments quelconques de $\mathbb{R}_n[X]$, posons

$$< P, Q > \quad = \quad P(t_0)Q(t_0) + \cdots + P(t_n)Q(t_n).$$

1. Avec $n = 2$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1/2$, $t_2 = 1$, calculer $< P, Q >$, $\|P\|$, $\|Q\|$, et $d(P, Q)$, où $P(X) = 12X^2$ et $Q(X) = 2X - 1$.
2. Dans le cadre général, montrez que nous avons ainsi défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit $n = 4$, $t_0 = -2$, $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$ et $t_4 = 2$. Considérons $\mathbb{R}_2[X]$ comme sous-espace de $\mathbb{R}_4[X]$, de base $\{1, X, X^2\}$.
   (a) Construisez une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Exprimez les polynômes 1, X et X^2 dans cette base.
   (c) Déterminez la meilleure approximation de $P(X) = 5 - \frac{1}{2}X^4$ par des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 10 (Réflexion)

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Soit la symétrie orthogonale dans $\mathbb{R}^2$ (pour le produit scalaire euclidien classique) par rapport à $\vec{u}^{\perp}$ (et parallèlement à $\vec{u}$.) Le vecteur $\vec{u}$ à pour coordonnées u (vecteur colonne) dans la base canonique. Cette symétrie orthogonale est aussi appelée réflexion d'un vecteur par rapport au sous espace vectoriel engendrée par $\vec{u}^{\perp}$.
   Montrer que la matrice Q ci dessous est la matrice de cette réflexion ;
$$Q = I_2 - 2\frac{uu'}{u'u}.$$
2. Soit la matrice $n \times n$ suivante
$$Q \quad = \quad I_n - 2\frac{uu'}{u'u}$$
   avec u vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $Qu = -u$ et que quelque soit $v \perp u$ $Qv = v$. Il s'agit donc de la réflexion par rapport au sous espace vectoriel engendrée par $\vec{u}^{\perp}$ (et parallèlement à $\vec{u}$).

Exercice 11

On ne se servira pas de la décomposition $E = F \oplus F^{\perp}$ dans cet exercice (dont le but est de le démontrer). Soit F un sous espace vectoriel de E espace euclidien de dimension finie n. Nous nous intéressons aux vecteurs $\vec{u}$ qui soient orthogonaux à un sous-espace F et à son complément orthogonal.

1. Ecrire la définition de $\vec{u}$ est orthogonal à au sous-espace F et remarquer que, par définition, $\vec{u}$ est élément de $F^{\perp}$.
2. Ecrire la définition de $\vec{u}$ est orthogonal à au sous-espace $F^{\perp}$ et remarquer que, par définition, $\vec{u}$ est élément de F.
3. Déduire des deux questions précédentes que $F \cap F^{\perp}$ si le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à un sous-espace F et à son complément orthogonal alors $\vec{u} \in F \cap F^{\perp}$.
4. Comme $\vec{u} \in F \cap F^{\perp}$ déduire que $< \vec{u}, \vec{u} >= 0$ et donc que $F \cap F^{\perp} = \{\vec{0}\}$ puis que $E = F \oplus F^{\perp}$.

Exercice 12

Soit F un sous-espace de dimension finie d'un espace euclidien E. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E. Etablissez l'équivalence entre les propositions suivantes :

1. $\vec{v} = \pi_F^{\perp}(\vec{u})$
2. $\vec{v} \in F$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \inf \left\{\|\vec{t} - \vec{u}\| : \vec{t} \in F\right\}$
3. $\vec{v} \in F$ et $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.

Exercice 13 (Réflexion et triangularisation)

soit la matrice A suivante

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & -20 & -75 \\ 3 & 27 & -25 \\ 4 & 11 & 50 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la norme euclidienne du premier vecteur colonne (ie la colonne 1) de A, norme notée $\|a_{.1}\|$.
2. Notons $a_{.1}$ la première colonne de A. Soit le vecteur $u = a_{.1} + \|a_{.1}\|e_1$ où $e_1 = {}^t(1,0,0)$. Nous allons calculer la reflexion de $a_{.1}$ par rapport au sous espace vectoriel engendrée par $u^\perp$ (et parallèlement à u) ; cette réflexion a pour matrice Q (cf exercice 10) :
   (a) Montrer que $Qa_{.1} = -\|a_{.1}\|e_1$ (on peut répondre à cette question sans calculer $\|a_{.1}\|$ ni même effectuer numériquement ${}^ta_{.1}e_1$ ou autre)
   (b) En déduire que

$$B = QA \quad = \begin{pmatrix} -5 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

   où $\times$ figure un nombre (qui peut être nul par hasard) et que l'on ne calculera pas.
3. Sachant que B vaut

$$\left(\begin{array}{c|cc} -5 & -25 & -55 \\ \cline{2-3} 0 & 24 & 37 \\ 0 & 7 & 66 \end{array}\right)$$

   (a) soit B_{22} la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 24 & 37 \\ 7 & 66 \end{pmatrix}.$$

   Montrer en utilisant Notons $b_{.1}$ la première colonne de B_{22}. Soit le vecteur $u = b_{.1} + \|b_{.1}\|e_1$ où $e_1 = {}^t(1,0)$. Nous allons calculer la reflexion de $b_{.1}$ par rapport au sous espace vectoriel engendrée par $u^\perp$ (et parallèlement à u) ; cette réflexion a pour matrice Q_{22} (cf exercice 10) :
      i. Se rappeler que $Q_{22}b_{.1} = -\|b_{.1}\|e_1$
      ii. Déduire que

$$Q_{22}B_{22} = \begin{pmatrix} -25 & \times \\ 0 & \times \end{pmatrix}$$

      où $\times$ figure un nombre (qui peut être nul par hasard) et que l'on ne calculera pas.
   (b) En déduire que

$$C = Q_2B \quad = \begin{pmatrix} I_1 & \mathbf{0}_{1\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times 1} & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -25 & -25 \\ 0 & 24 & 5 \\ 0 & 7 & 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -25 & -55 \\ 0 & -25 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$

   où $\times$ figure un nombre (qui peut être nul par hasard) et que l'on ne calculera pas.