Transformations orthogonales et matrices symétriques

Exercice 1
Soit la forme bilinéaire symétrique :

$$\begin{array}{llll} \varphi : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto 9x_1y_1 + 24x_2y_2 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1. \end{array}$$

où $\vec{x}$ et $\vec{y}$ ont pour coordonnées dans la base canonique (x_1, x_2) et (y_1, y_2). Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées dans la base canonique :

$$u_{\mathsf{can}} = (1, 2)', \quad v_{\mathsf{can}} = (-2, 4)'.$$

1. Donner la matrice de φ par rapport à la base canonique. On notera M_{can} cette matrice. Calculer $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$.
   (a) Montrer que φ est un produit scalaire en utilisant la méthode de Gauss ou le pivot de Gauss.
   (b) A l'aide de la décomposition de Gauss, trouver une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.
   (c) Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}$ et en déduire $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$.
2. (a) Pourquoi M_{can} est orthogonalement diagonalisable ?
   (b) Donner une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.
   (c) Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}'$ et retrouver $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 2
Considérons $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique et F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\vec{f_1} = (1, 1, 1)'$ et $\vec{f_2} = (1, 2, -1)'$. On note X la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donnez la matrice de la projection orthogonale sur F en fonction de X.

Exercice 3
Diagonaliser orthogonalement les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 73 & 36 \\ 36 & 52 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Racine carrée d'une matrice)
Soit V une matrice symétrique positive, montrez que V peut s'écrire comme le produit d'une matrice S et de sa transposée.

Exercice 5 (Forme quadratique)
Considérons la forme quadratique suivante :

$$q(\vec{x}) \quad = \quad x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

où comme d'habitude $\vec{x}$ a pour coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base canonique

1. Déterminez A la matrice associée à Q.
2. Diagonaliser orthogonalement A.
3. Transformer Q pour obtenir une forme sans terme produit.

Exercice 6 (Projection et polynômes)
Considérons l'espace vectoriel des polynomes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soient $t_0, t_1, \dots, t_3$, 4 nombres réels distincts fixés. Pour P et Q deux éléments quelconques de $\mathbb{R}_3[X]$, posons

$$< P, Q > \quad = \quad P(t_0)Q(t_0) + \cdots + P(t_3)Q(t_3).$$

1. Montrez que nous avons ainsi défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Soit $t_0 = -1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ et $t_3 = 2$. Considérons $\mathbb{R}_2[X]$ comme sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$, de base $\{1, X, X^2\}$. Déterminez la meilleure approximation de $P(X) = 5 - \frac{1}{2}X^3$ et $Q(X) = 3X + 2X^2$ par des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 7 (Valeurs propres d'une matrice de projection)
Quelles sont les valeurs propres de la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur F sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2 ?

Exercice 8 (Produit scalaire et intégrale)
Soit $n \geq 1$ un entier fixé, considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Pour P et Q deux éléments quelconques de $\mathbb{R}_n[X]$, posons

$$< P, Q > \quad = \quad \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt.$$

1. Vérifier que $< ., . >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ (Indication : on rappelle que l'intégrale d'une fonction continue positive sur un segment est nulle ssi la fonction est nulle sur ce segment).
2. Calculer $< P, Q >$, $\|P\|$, $\|Q\|$, et $d(P, Q)$, où $P(X) = 1$ et $Q(X) = X$.
3. On fixe $n = 2$ et on considère la base canonique $\{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Par le procédé de Gram-Schmidt, construire une base orthonomée de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Exprimez les polynômes 1, X et X^2 dans cette base.
5. Considérons $\mathbb{R}_2[X]$ comme sous-espace de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminez la meilleure approximation de $P(X) = X^3$ par des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 9 (Critère de Sylvester)
Considérons la forme quadratique $Q(x) = x'Ax$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},$$

1. Montrer que A admet 2 valeurs propres réelles λ_1 et λ_2, sans se servir du fait que toute matrice symétrique réelle admet des valeurs propres réelles.
2. Montrez que $a + d = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$.
3. On suppose que $\det(A) > 0$ et $a > 0$. Montrez que la forme quadratique est définie positive.

Exercice 10 (Isométrie et matrice orthogonale)
Soit U une matrice carrée de taille n telle que

$$< Ux, Uy > \quad = \quad < x, y >, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

où $<, >$ dénote le produit scalaire euclidien standard. Montrez que la matrice U est orthogonale.

Exercice 11 (Valeurs propres d'une matrice orthogonale)
Montrez que si U est une matrice orthogonale, alors toute les valeurs propres réelles valent ± 1.

Exercice 12 (Etude spectrale)
Soit la matrice

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} m & 2 & 2 \\ 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & m \end{pmatrix},$$

où m est un réel fixé.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. La matrice A est-elle inversible ?
3. Touvez les valeurs propres et sous-espaces propres de A ?
4. Discutez du rang de A en fonction de m.
5. Trouvez l'inverse de A lorsque l'inverse existe.