TD de topologie et calcul différentiel– Corrigé de la Feuille 3: Topologie des espaces métriques

Groupe de TD 5

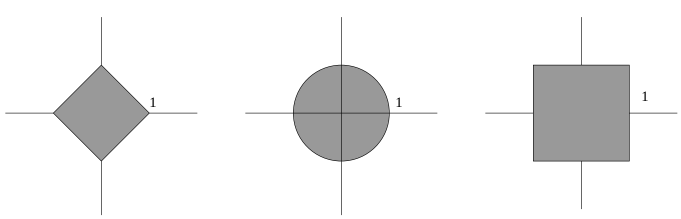
Rappelons que la distance usuelle du plan $\mathbb{R}^2$ est la distance euclidienne définie par
$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$
si x et y ont pour coordonnées (x_1,x_2) et (y_1,y_2) respectivement.

Exercice 1. Soient les fonctions du plan $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ définies par
$$N_1(x) = |x_1| + |x_2|, \quad N_2(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad N_\infty(x) = \max(|x_1|,|x_2|)$$
si x a pour coordonnées (x_1,x_2).

Vérifier que $d_i(x,y) = N_i(x-y)$ est une distance de $\mathbb{R}^2$ pour $i = 1, 2$ ou ∞. Dessiner la boule centrée en l'origine et de rayon 1 pour chacune de ces distances. Montrer que ces distances sont équivalentes (on pourra montrer que
$$N_\infty(x) \leqslant N_1(x) \leqslant 2N_\infty(x) \text{ et } N_\infty(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \sqrt{2}N_\infty(x)$$
quel que soit $x \in \mathbb{R}^2$). Vérifiez que la topologie de $\mathbb{R}^2$ induite par ces distances est la topologie dite usuelle.

Correction 1. Pour $i = 1, 2$ ou ∞, on vérifie immédiatement que $N_i(x)$ s'annule si et seulement si $x_1 = x_2 = 0$. Par conséquent, quels que soient x et y dans $\mathbb{R}^2$,
$$d_i(x,y) = 0 \Leftrightarrow N_i(x-y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$
D'autre part, il est clair que $N_i(x) = N_i(-x)$. On en déduit que
$$d_i(x,y) = N_i(x-y) = N_i(y-x) = d_i(y,x).$$
Il reste à vérifier l'inégalité triangulaire. Pour cela, il suffit de montrer que
$$N_i(x+y) \leqslant N_i(x) + N_i(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2. \tag{0.1}$$
En effet, comme $x - y = (x-z) + (z-y)$, il vient
$$d_i(x,y) = N_i(x-y) \leqslant N_i(x-z) + N_i(z-y) = d_i(x,z) + d_i(y,z).$$
Vérifions (0.1) pour $i = 1$: $N_1(x+y) = |x_1+y_1| + |x_2+y_2| \leqslant |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| = N_1(x) + N_1(y)$.

Considérons maintenant $i = \infty$, on a $|x_1 + y_1| \leqslant |x_1| + |y_1| \leqslant \max(|x_1|,|x_2|) + \max(|y_1|,|y_2|) = N_\infty(x) + N_\infty(y)$. De même $|x_2 + y_2| \leqslant N_\infty(x) + N_\infty(y)$. Donc $N_\infty(x+y) = \max(|x_1+y_1|,|x_2+y_2|)$ est inférieur ou égal à $N_\infty(x) + N_\infty(y)$. Enfin, d_2 n'est autre que la distance usuelle de $\mathbb{R}^2$, qui vérifie bien-entendu l'inégalité triangulaire.



Les boules sont représentées pour d_1, d_2 et d_∞ successivement.

Montrons que d_1 et d_∞ sont équivalentes. Comme $|x_1| \leqslant |x_1| + |x_2|$ et $|x_2| \leqslant |x_1| + |x_2|$, on a $N_\infty(x) \leqslant N_1(x)$. D'autre part $N_1(x) \leqslant 2N_\infty(x)$. On en conclut que quels que soient les points x et y,

$$d_\infty(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant 2d_\infty(x,y).$$

Les distances sont donc équivalentes. On peut en effet vérifier la définition 2.1.5 du cours: soit $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$, alors

$$B_\infty(x, r/2) \subset B_1(x,r) \subset B_\infty(x,r).$$

On aurait pu aussi remarquer que si une suite $x_n \to a \in \mathbb{R}^2$ pour la topologie associée à $(\mathbb{R}^2, d_1)$, autrement dit $d_1(x_n, a) \to 0$, alors $d_\infty(x_n, a)$ converge vers 0 puisqu'elle est majorée par $d_1(x_n, a)$, et donc (x_n) converge vers a pour la topologie induite par d_∞. On vérifie la réciproque de la même façon. Les topologies des espaces métriques $(\mathbb{R}^2, d_1)$ et $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ sont donc identiques, puisqu'elles ont mêmes suites convergentes (voir théorème 2.8.5). On suit exactement la même méthode pour montrer que d_2 et d_∞ sont équivalentes. On en déduit ensuite par transitivité que d_1 et d_2 sont aussi équivalentes.

Remarque 1. Pour information, les fonctions N_i sont des *normes* de $\mathbb{R}^2$. L'étude des espaces vectoriels normés sera l'objet d'un chapitre ultérieur du cours. On verra en particulier que dans un $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)-espace vectoriel de *dimension finie*, toutes les normes sont équivalentes.

Exercice 2. On munit le sous ensemble $X = [0,1] \cup [2,4[$ de $\mathbb{R}$ de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$

a) $A = [2,4[$ est-il ouvert dans l'espace topologique X ? Est-il fermé ?

b) Montrer que $B = [0,1]$ est ouvert et fermé dans X.

c) La suite $u_n = 4 - 3^{-n}$ est -elle convergente dans X ?

Correction 2. *a)* Le sous-ensemble A de X est l'intersection de X avec la boule ouverte de $\mathbb{R}$, de centre 3 et de rayon 1,5 donc A est ouvert dans X (voir le paragraphe du cours sur la topologie induite sur les sous-espaces). Mais A est aussi fermé dans X car c'est l'intersection de X avec la boule fermée de $\mathbb{R}$ de centre 3 et de rayon $1,5$.

b) De même, on voit que le sous ensemble B est à la fois ouvert et fermé dans X: c'est en effet l'intersection de X avec la boule ouverte (respectivement fermée) de $\mathbb{R}$ de centre $1/2$ et de rayon $3/2$.

c) Si la suite donnée (qui est bien dans X) convergeait dans X vers un point ℓ, elle convergerait aussi dans $\mathbb{R}$ vers ce point. Mais dans $\mathbb{R}$, la suite tend vers 4. Comme la limite est unique, on a $\ell = 4$, ce qui est absurde puisque $4 \notin X$.

Remarque 2. La suite $u_n = 4 - 3^{-n}$ est un exemple de suite de Cauchy qui ne converge pas. On peut démontrer le *c)* sans faire référence à $\mathbb{R}$. En effet, si $l \in X$, alors $|4 - l| > 0$ et à partir d'un certain rang, aucun point de la suite u_n n'est dans la boule $B(l, |4-l|/2)$. Ceci prouve qu'aucun $l \in X$ n'est limite de la suite u_n.

Exercice 3. Soit (E,d) un espace métrique et A une partie (non vide) de E. Etant donné $x \in E$, on définit "la distance de x à A" par la formule

$$d(x,A) := \inf_{y \in A} (d(x,y)).$$

a) Montrer que $d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$. Montrer que $d(x,A) = d(x, \overline{A})$.

b) Montrer que l'application $x \mapsto d(x,A)$ de E dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue (on pourra montrer qu'elle est lipchitzienne).

Correction 3. a) Dans un espace métrique, $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ d'éléments de A telles que $x_n \to x$ c'est à dire qu'il existe une suite x_n dans A telles que $d(x_n, x) \to 0$. Il en résulte immédiatement que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$. Ensuite $A \subset \overline{A}$ implique $d(x, A) \geq d(x, \overline{A})$. Il reste à montrer que $d(x, \overline{A}) \geq d(x, A)$ c'est à dire que pour tout $r > 0$, $d(x, \overline{A}) + r > d(x, A)$. Fixons un tel r, et soit $y \in \overline{A}$ tel que $d(x, y) < d(x, \overline{A}) + r/2$. Comme $y \in \overline{A}$, il existe $z \in A$ tel que $d(z, y) < r/2$. D'après l'inégalité triangulaire, il suit que $d(x, z) < d(x, \overline{A}) + r$ d'où le résultat en passant à l'inf. .

b) D'après le cours, il suffit de montrer qu'elle est 1-lipchsitzienne (en fait k-lipchsitzienne pour n'importe quel k suffit). D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $a \in A$ et $x, y \in E$, on a $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. D'où, en passant à l'inf à gauche, $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, a)$ et en passant à l'inf à gauche on obtient $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. En inversant les rôles de x et y on obtient $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Exercice 4. On note d la distance usuelle de $\mathbb{R}^2$. Si x et y sont deux vecteurs du plan, on définit $d'(x, y) := d(x, y)$ si x et y sont colinéaires et $d'(x, y) := d(x, 0) + d(y, 0)$ s'ils ne le sont pas.

1) Montrer que d' est une distance. On l'appelle *distance SNCF*, pourquoi ? Décrire géométriquement la boule ouverte $B'(x, r)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}^+$.

2) La distance d' est-elle équivalente à la distance usuelle de $\mathbb{R}^2$?

3) Lesquelles des transformations suivantes du plan sont continues pour la distance SNCF: rotation de centre $0_{\mathbb{R}^2}$, homothétie de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et translations ?

4) Déterminer l'adhérence du demi-plan $H = \{(x, y)/\ y > 0\}$ et l'intérieur de l'axe des ordonnées D pour la distance SNCF.

Correction 4. 1) Il est clair que la fonction d' est symétrique et que $d'(x, y)$ s'annule si et seulement si $x = y$. Pour vérifier l'inégalité triangulaire $d'(x, y) \leqslant d'(x, z) + d'(y, z)$, il convient de traiter séparément les cas suivants:

- les vecteurs x, y, z sont deux à deux colinéaires.
- x et y sont colinéaires, x et z le sont aussi, par contre y et z ne le sont pas. Alors, $x = 0$.
- x et z sont colinéaires, y et z le sont aussi, par contre x et y ne le sont pas. Alors, $z = 0$.
- x et y ne sont pas colinéaires, x et z ne le sont pas non plus, par contre y et z le sont.
- x et z ne sont pas colinéaires, y et z ne le sont pas non plus, par contre x et y le sont.
- Aucun couple de $\{x, y, z\}$ n'est formé de vecteurs colinéaires.

Deux cas n'ont pas été considérés (lesquels ?), car il se ramènent aux cas précédents par symétrie de x et y dans l'inégalité triangulaire. Enfin, la vérification de l'inégalité est immédiate dans chacun des cas présentés (elle se déduit de l'inégalité triangulaire pour la distance usuelle).

$d'(x, y)$ peut représenter le temps nécessaire pour se rendre de x à y par le train, Paris étant placé à l'origine.

2) Décrivons les boules de d' en fonction des boules $B(x,r)$ pour la distance usuelle. Si x est l'origine, $B'(x,r) = B(x,r)$. Si x n'est pas l'origine, alors pour $r \leqslant d(x,0)$, $B'(x,r)$ est le segment ouvert $S(x,r)$ de la droite passant par x et l'origine centré en x et de longueur $2r$. Pour $r > d(x,0)$, $B'(x,r)$ est la réunion du segment $S(x,r)$ et de la boule $B(0, r - d(x,0))$.

Cette distance n'est pas équivalente à la distance usuelle. En effet, la boule B' centrée en $(1,0)$ de rayon 1 est incluse dans l'axe des abscisses. Or aucune boule pour la distance usuelle de rayon strictement positif n'est incluse dans cet axe, donc dans B'.

Par contre, on voit facilement qu'en tout point x, toute boule pour la distance usuelle centrée en x contient une boule pour d' centrée en x (en effet si $x \neq 0$, pour $\varepsilon > 0$ suffisament petit, la boule $B'(x,\varepsilon)$ est un segment ouvert centré sur x). Donc, les ouverts de d (qui sont réunions de boules) sont aussi ouverts pour d', la réciproque est fausse comme on l'a vu.

3) Les rotations par rapport à l'origine préservent la distance usuelle et transforment des vecteurs colinéaires en vecteurs colinéaires. Par conséquent elles sont des isométries pour la distance *SNCF* et sont donc continues pour cette distance (elles sont en particulier 1-lipchitzienne). De même, l'homothétie f de centre l'origine et de rapport λ vérifie $d'(f(x), f(y)) = |\lambda| d'(x,y)$. Elle est donc continue comme application lipschitzienne. Enfin une translation T de vecteur $x \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ n'est pas continue. En effet, notons ℓ la norme de x. Alors la boule pour d' centrée en x de rayon $\ell/2$ est le segment $]x/2, 3x/2[$, son image réciproque par T est $]-x/2, x/2[$. Si T était continue, $]-x/2, x/2[$ serait ouvert comme image réciproque d'une boule ouverte. Or ce n'est pas le cas: $]-x/2, x/2[$ contient l'origine $0_{\mathbb{R}^2}$ mais ne contient aucune boule centrée en l'origine.

D'autres preuves sont bien-sur possibles. par exemple, on pourrait exhiber une suite $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que la suite $T(y_n)$ ne converge pas vers $T(y)$. Il suffit de prendre y non-colinéaire à x (et donc non-nul) et $y_n = (1 - 1/n)y$ une suite de points sur la droite vectorielle contenant y. Alors $T(y_n)$ et $T(y)$ ne sont plus colinéaires. Il suit que $d'(T(y_n), T(y)) \geq d(T(y), 0) = d(y, 0) > 0$; la suite $T(y_n)$ ne converge donc pas vers $T(y)$.

4) On peut remarquer facilement que H est ouvert. Rappelons que $H \subset \overline{H}$ et que

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \{z = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \text{ est adhérent àÂ } H\} \\ & \quad \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, \forall r > 0,\ B'(x,r) \cup H \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Or si $z = (x,y) \neq 0$, pour r suffisament petit, $B'(x,r)$ est un segment ouvert cnetré en x et portée par la droite vectorielle $\mathbb{R}x$. Il suit que si $z = (x,y) \neq 0$ et $y \leq 0$, alors z n'est aps adhérent à H. En revanche, $0 = \{0,0\}$ est adhérent à H puisque les boules centrées sur 0 pour la distance d' sont les boules euclidiennes usuelles. Par conséquent $\overline{H} = H \cap \{0\}$.

Un argument similaire montre que si $z = (0,y) \in D$ est non nul, z est intérieur à D mais que 0 n'est aps intérieur à D. D'où $\mathring{D} = D - \{0\}$. En fait, on montre de même que l'intérieur de toute droite vectorielle est la droite privée de l'origine $\{0\}$.

Exercice 5. On considère le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle et le cercle unité $S^1 = \{(x,y) / \, x^2 + y^2 = 1\}$ muni de la topologie trace.

1) Montrer que l'application

$$p : \mathbb{R} \to S^1, \qquad \alpha \to (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

est continue.

2) Soit E un espace topologique. Montrer qu'une application $f : S^1 \to E$ est continue si et seulement si $f \circ p$ l'est aussi.

3) Quels sont les ouverts de S^1 considéré comme sous-espace de $\mathbb{R}^2$ muni de la distance *SNCF* de l'exercice 4 ?

Rappelons que si X, Y sont des espaces topologiques et $A \subset Y$ un sous-espace muni de la topologie induite par Y (appelée aussi topologie trace), alors l'injection $i : A \hookrightarrow Y$ est continue et de plus on a la propriété suivante:

$$f : X \to A \text{ est continue } \iff i \circ f : X \to Y \text{ est continue.}$$

Correction 5. **1)** L'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ qui à α associe le point de coordonneés $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ est continue car ses composantes le sont. D'après le rappel juste avant le corrigé, p est alors continue.

2) Si $f : S^1 \to E$ est continue, alors $f \circ p$ l'est aussi comme composée de fonctions continues. Réciproquement, supposons que $f \circ p$ est continue et montrons que f l'est. Comme S^1 est un espace métrique (sous-espace d'un espace métrique), il suffit de montrer que pour tout $z \in S^1$ et toute suite (z_n) de S^1 convergeant vers z, $(f(z_n))$ converge vers $f(z)$. Choisissons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p(\alpha) = z$. Comme (z_n) converge z, à partir d'un certain rang N, z_n appartient à la boule de $\mathbb{R}^2$ centrée en z de rayon 1. Alors pour tout $n \geqslant N$ il existe un unique $\alpha_n \in]\alpha - \pi/2, \alpha + \pi/2[$ tel que $p(\alpha_n) = z_n$ et de plus

$$d(z_n, z) \geqslant (2/\pi)|\alpha_n - \alpha|$$

(démontrer ces propriétés sur un dessin !). En fait on peut montrer facilement que l'application p restreinte à $]\alpha - \pi/2, \alpha + \pi/2[$ est un homéomorphisme (c'est Ã dire bijective, continue et dont l'inverse est également continue). Par hypothèse $d(z_n, z) \to 0$, donc $\alpha_n \to \alpha$ (puisque $d(z_n, z) \geqslant (2/\pi)|\alpha_n - \alpha|$). Comme $f \circ p$ est continue, on a $(f \circ p)(\alpha_n) \to (f \circ p)(\alpha)$, autrement dit $f(z_n) \to f(z)$.

3) D'après le cours, un ouvert est l'intersection d'un ouvert pour la topologie de la distance *SNCF* et de S^1. Mais tout point z de S^1 est non-nul. Il résulte de l'exercice 4, que $B'(x, d(x, 0)) \cap S^1 = \{x\}$ (où d est la distance usuelle). Donc tous les points de S^1 sont ouverts pour la topologie induite par la distance *SNCF* d' et donc S^1 est discret pour cette topologie.

On peut aussi remarquer que la topologie trace (dite aussi topologie induite) de S^1 est la topologie associée à la métrique obtenue comme restriction de d' à $S^1 \times S^1$. En particulier, on a pour tout $x, y \in S^1$

$$d'(x,y) = \begin{cases} 2 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases} .$$

Exercice 6. Soit E un ensemble, d_1 et d_2 deux distances sur E. Montrer que $d' = d_1 + d_2$ et $d'' = \max(d_1, d_2)$ sont des distances sur E et qu'elles y définissent la même topologie.

Correction 6. La vérification des axiomes est immédiate : soient a, b, c trois éléments de E (en topologie on dit des points, même si E n'est pas une droite ou un plan). On a clairement $d'(a, b) = 0$ si et seulement si $a = b$. De même pour d''. Ensuite $d'(a, b) = d'(b, a)$ et de même pour d''. L'inégalité triangulaire est bien vérifiée pour d' :

$$d'(a, c) = d_1(a, c) + d_2(a, c) \leq d_1(a, b) + d_1(b, c) + d_2(a, b) + d_2(b, c),$$

puisque d_1 et d_2 sont des distances, donc $d'(a,c) \leq d'(a,b) + d'(b,c)$. Ensuite on a, pour $i = 1 \,\text{ou}\, 2$,

$$d_i(a,c) \leq d_i(a,b) + d_i(b,c) \leq d''(a,b) + d''(b,c),$$

ce qui donne bien $d''(a,c) \leq d''(a,b) + d''(b,c)$. Par ailleurs, il est clair que $d'' \leq d' \leq 2d''$. On en conclut que les distances sont équivalentes comme dans la fin de l'exercice 1.

Exercice 7. A l'aide des suites et de la caractérisation de l'adhérence et de la continuité dans le cas des espaces métriques, donner des preuves plus simples du sens direct de l'exercice 2 de la feuille de TD 2, de l'exercice 3 de la feuille de TD 2 du **1** de l'exercice 10 de la feuille de TD 1 et de l'exercice 8 de la feuille de TD 2. On supposera à chaque fois que les espaces topologiques sont métrisables.

Correction 7. Sens direct de l'exercice 2 de la feuille de TD 2 lorsque X et Y sont des espaces métriques. Supposons $f : X \to Y$ continue. Soit A une partie de X. Tout point x de $\overline{A}$ est limite d'un suite (x_n) de A. f étant continue, $f(x_n)$ converge vers $f(a)$. Or $f(x_n)$ est une suite de $f(A)$, donc $f(x) \in \overline{f(A)}$.

Exercice 3 de la feuille de TD 2 lorsque X et Y sont des espaces métriques. Montrons que $A = \{x/\ f(x) = g(x)\}$ contient les limites de ses suites convergentes. Si (x_n) est une suite de A qui converge vers x, alors $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ et $(g(x_n))$ vers $g(x)$ par continuité de f et g. Comme $f(x_n) = g(x_n)$ pour tout n, les limites $f(x)$ et $g(x)$ sont égales, autrement dit $x \in A$.

1) de l'exercice 10 de la feuille de TD 1 lorsque X est un espace métrique. Rappelons que $A \subset Y \subset X$. Un point $x \in Y$ adhérent à A dans Y est limite d'une suite (x_n) de A. Comme (x_n) converge aussi vers x dans X, x appartient à l'adhérence $\overline{A}$ de A dans X. Réciproquement, si $x \in \overline{A} \cap Y$, alors x est limite dans X de (x_n) à valeurs dans A. Comme $x \in Y$, x est aussi limite de (x_n) dans F, donc il appartient à l'adhérence de A dans Y.

Exercice 8 de la feuille de TD 2 lorsque X et Y sont des espaces métriques. f est une fonction continue de X dans Y. Pour montrer que sa restriction à une partie A de X est continue, il suffit de montrer que pour tout x dans A et toute suite (x_n) de A convergeant dans A vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$. C'est évident car une telle suite (x_n) converge dans X vers x.

Exercice 8. Soit E un ensemble possédant aux moins deux éléments distincts. Vérifier que l'application $d : E \times E \to [0, +\infty[$ qui au couple (x,y) associe 1 si $x \neq y$ et 0 si $x = y$ est une distance. Montrer que la topologie associée à cette distance est la topologie discrète. Est-ce que l'adhérence d'une boule ouverte $B(x,\delta) = \{y \in E \,/\, d(x,y) < \delta\}$ est nécéssairement la boule fermée $B_F(x,\delta) = \{y \in E \,/\, d(x,y) \leq \delta\}$ qui lui est associée ?

Correction 8. L'axiome de symétrie $(d(x,y) = d(y,x))$ est évident tout comme il est clair que $d(x,y) = 0$ ssi $x = y$. L'inégalité triangulaire se vérifie aisément. Pour montrer que la topologie associée est discrète, il suffit de montrer que tous les singletons $\{y\}$ sont ouverts. Or $\{y\} = B(y,r)$ pour tout $r \leq 1$. On remarque que $B_F(y,1) = E$. Mais comme $\{y\}$ est fermé, $\overline{B(y,1)} = \overline{\{y\}} = \{y\} \neq B_F(y,1)$.