Diagonalisation (suite)

Exercice 1 (Système dynamique linéaire)
On considère deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ telles que $u_0 = v_0 = 1$ et satisfaisant, pour tout $n \geq 0$, le système de relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -6u_n - 4v_n \end{cases}$$

En vous inspirant du problème précédent (écriture sous forme matricielle, diagonalisation, etc.), déterminez les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 2 (Projection et symétrie par rapport à un plan)
On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. En déduire une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Calculer A^2. Qu'en déduisez-vous sur f ?
4. Dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$, représenter $\mathsf{Ker}(A)$ et $\mathsf{Im}(A)$.
5. Soit M un point de l'espace $\mathbb{R}^3$. Construire géométriquement $f(M)$.
6. On considère maintenant un endomorphisme g dont la matrice dans la base canonique est :

$$B = 2A - I_3 = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

   Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de B.
7. En déduire une matrice de passage Q et une matrice diagonale Δ telles que $B = Q\Delta Q^{-1}$.
8. Calculer B^2. Qu'en déduisez-vous sur g ?
9. Dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$, représenter l'ensemble des vecteurs v invariants par g. Représenter aussi l'ensemble des vecteurs v tels que $g(v) = -v$.
10. Soit M un point de l'espace $\mathbb{R}^3$. Construire géométriquement $g(M)$.

Exercice 3 (Projection et symétrie par rapport à une droite)
On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2. En déduire une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. Calculer A^2. Qu'en déduisez-vous sur f ?
4. Dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$, représenter $\mathsf{Ker}(A)$ et $\mathsf{Im}(A)$.
5. Soit M un point de l'espace $\mathbb{R}^3$. Construire géométriquement $f(M)$.
6. On considère maintenant un endomorphisme g dont la matrice dans la base canonique est :

$$B = 2A - I_3 = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

   Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de B.
7. En déduire une matrice de passage Q et une matrice diagonale Δ telles que $B = Q\Delta Q^{-1}$.
8. Calculer B^2. Qu'en déduisez-vous sur g ?
9. Dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$, représenter l'ensemble des vecteurs v invariants par g. Représenter aussi l'ensemble des vecteurs v tels que $g(v) = -v$.
10. Soit M un point de l'espace $\mathbb{R}^3$. Construire géométriquement $g(M)$.
11. En remarquant que cette matrice B est l'opposée de la matrice B de l'exercice précédent, retrouver ce point $g(M)$.

Exercice 4 (Chaîne de Markov)
Un petit scarabée se déplace sur un triangle, dont les sommets sont numérotés $\{1, 2, 3\}$. A l'instant n, s'il est au sommet i, il va vers le sommet j avec la probabilité p_{ij}, où il se retrouve à l'instant $(n+1)$. Si $i = j$, il reste sur place. La matrice de transition $P = [p_{ij}]_{1\leq i,j\leq 3}$ est donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

1. Diagonaliser la matrice P.
2. On admet que la probabilité d'être à l'instant n au sommet j sachant que le scarabée est initialement (c'est-à-dire à l'instant 0) au sommet i est donnée par le terme (i, j) de la matrice P^n. Calculer P^n.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P^n$. Interpréter le résultat.
4. Les transitions du scarabée sont maintenant données par la matrice :

$$P = \begin{bmatrix} 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{bmatrix}.$$

   En appliquant la même méthode, déterminer $\lim_{n\to+\infty} P^n$. Interpréter le résultat.

Exercice 5 (Suite de Fibonacci)
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On veut trouver une formule donnant le terme général u_n en fonction de n. Pour cela, on construit une suite de vecteurs $(V_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \geq 0 \qquad V_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer V_0, V_1, V_2.
2. Grâce à la relation de récurrence sur $(u_n)_{n\geq 0}$, trouver une matrice A de taille 2×2 telle que pour tout $n \geq 0$: $V_{n+1} = AV_n$.
3. En déduire V_n en fonction de V_0, A et n.
4. Diagonaliser A. En déduire V_n, puis u_n.

Exercice 6 (Récurrence d'ordre 3)
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_{n+3} = \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

1. En reprenant la méthode ci-dessus avec le vecteur V_n défini pour tout $n \geq 0$ par :

$$V_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{bmatrix},$$

   déterminer le terme général u_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. Généralisation (récurrence d'ordre p) : soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite dont on connaît les p premiers termes $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ et obéissant à la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n.$$

   En vous inspirant de ce qui précède, proposer une méthode pour déterminer u_n.

Exercice 7 (Exponentielle de matrice)
Soit A une matrice de taille $n \times n$. On appelle exponentielle de la matrice A et on note $\exp(A)$ la matrice de taille $n\times n$ définie par :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

A tout hasard, on rappelle que pour tout réel x, on a : $\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

1. On considère tout d'abord la matrice A définie par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Calculer valeurs et vecteurs propres de A. En déduire une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que : $A = PDP^{-1}$.
3. Calculer $\dfrac{D^n}{n!}$. En déduire $\exp(D)$.
4. Exprimer $\exp(A)$ en fonction de P, P^{-1} et $\exp(D)$. En déduire que :

$$\exp(A) = \begin{bmatrix} \mathsf{ch}(1) & \mathsf{sh}(1) \\ \mathsf{sh}(1) & \mathsf{ch}(1) \end{bmatrix}$$

   (on rappelle que $\mathsf{ch}(x) = (\exp(x) + \exp(-x))/2$ et $\mathsf{sh}(x) = (\exp(x) - \exp(-x))/2$).
5. Par la même méthode, calculer l'exponentielle de la matrice $-A$.
6. Calculer $(\exp(A))^{-1}$. Comparer à $\exp(-A)$.

7. Soit A une matrice de taille $n \times n$, que l'on suppose diagonalisable : $A = PDP^{-1}$, où D est diagonale de coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Exprimer $\exp(A)$ en fonction de P, P^{-1} et des λ_i.
8. Montrer que $\exp(A)$ est inversible d'inverse $\exp(-A)$.
9. Exprimer $\mathrm{Tr}(A)$ en fonction des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Déterminer $\det(\exp(A))$ en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$.
10. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

    La matrice A est-elle diagonalisable ?
11. Calculer A^2, A^3, et A^n pour tout $n \geq 4$. En déduire $\exp(A)$ en appliquant la formule de définition de l'exponentielle de matrice.
12. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

    Diagonaliser la matrice A et en déduire $\exp A$.
13. Calculer A^2, A^3, et de façon générale A^n. Retrouver le résultat de la question précédente pour $\exp(A)$ en appliquant la formule de définition de l'exponentielle de matrice.