Université François Rabelais de Tours
Département de Mathématiques

Td 3 : Produit scalaire

Algèbre — Semestre 4

Exercice 1

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz - on précisera l'espace préhilbertien $(E; \langle ., . \rangle)$ dans lequel on travaille et les vecteurs de E concernés - établir les inégalités suivantes et en étudier les cas d'égalité :

1. $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad |x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq \sqrt{n}.(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$;
2. $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad (x_1 + x_2 + ... + x_n).(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}) \geq n^2$;
3. $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq n.\sqrt{\frac{n+1}{2}}$;
4. $\forall M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \quad (tr(M))^2 \leq n.tr({}^tM.M)$;
5. Pour toute fontion f continue et strictement positive sur $[a, b]$, où $a < b \in \mathbb{R}$

$$(\int_a^b f(x)dx).(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx) \geq (b-a)^2.$$

Solution. On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Alors

$$\forall x, y \in E,\ |\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

1. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. On pose $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (1, \ldots, 1)$. On a alors

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$||X|| = \big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\big)^{\frac{1}{2}}$$
$$||Y|| = \big(\sum_{i=1}^{n} 1^2\big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$

En appliquant Cauchy-Schwarz au couple (X, Y), on trouve :

$$|\langle X, Y\rangle| = |\sum_{i=1}^{n} x_i| \leq ||X|| \cdot ||Y|| = \sqrt{n}\big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

On a égalité si et seulement si $X = 0$ ou $Y = \lambda X$, c'est-à-dire $x_1 = x_2 \ldots = x_n$.

2. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. On pose $X = (\sqrt{x_1}, \ldots, \sqrt{x_n})$ et $Y = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x_n}})$. On a alors

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_i}} = n$$
$$||X||^2 = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$||Y||^2 = \sum_{i=1}^{n} \big(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$$

En appliquant Cauchy-Schwarz (au carré) au couple (X,Y), on trouve :

$$\langle X,Y\rangle^2 = n^2 \leq ||X||^2 \cdot ||Y||^2 = (x_1+x_2+...+x_n).(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n})$$

Les deux vecteurs X et Y étant non nul, on a égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda Y$. Or

$$X = \lambda Y \iff \forall i,\ \sqrt{x_i} = \lambda \frac{1}{\sqrt{x_i}} \iff \forall i,\ x_i = \lambda.$$

On a donc égalité si et seulement si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

3. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. On pose $X = (\sqrt{1}, \ldots, \sqrt{n})$ et $Y = (1, \ldots, 1)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\langle X,Y\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}\\
||X|| &= (\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^{n} i)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\\
||Y|| &= (\sum_{i=1}^{n} 1^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}
\end{aligned}$$

En appliquant Cauchy-Schwarz au couple (X,Y), on trouve :

$$|\langle X,Y\rangle| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \leq ||X|| \cdot ||Y|| = \sqrt{n}\sqrt{n}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = n \cdot \sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Les deux vecteurs X et Y étant non nul, on a égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda Y$ ce qui est possible que lorsque $n = 1$.

4. Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tA \cdot B)$. Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité. On a alors

$$\begin{aligned}
\langle I_n, M\rangle &= \mathrm{Tr}(M)\\
||I_n||^2 &= \mathrm{Tr}(I_n) = n\\
||M||^2 &= \mathrm{Tr}({}^tM \cdot M)
\end{aligned}$$

En appliquant Cauchy-Schwarz (au carré) au couple (I_n, M), on trouve :

$$\mathrm{Tr}(M)^2 = |\langle I_n, M\rangle|^2 \leq ||I_n||^2 \cdot ||M||^2 = n \cdot \mathrm{Tr}({}^tM \cdot M).$$

On a éaglité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$.

5. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ muni du produit scalaire suivant

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Soit $f \in E$ une fonction strictement positive sur E. Les fonctions $\sqrt{f}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ sont bien définies et continues sur $[a,b]$. On a alors

$$\begin{aligned}
\langle \sqrt{f}, \frac{1}{\sqrt{f}}\rangle &= \int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx = b-a\\
||\sqrt{f}||^2 &= \int_a^b f(x)dx\\
||\frac{1}{\sqrt{f}}||^2\rangle &= \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx
\end{aligned}$$

En appliquant Cauchy-Schwarz (au carré) au couple $(\sqrt{f}, \frac{1}{\sqrt{f}})$, on trouve :

$$\langle \sqrt{f}, \frac{1}{\sqrt{f}} \rangle^2 = (b-a)^2 \leq ||\sqrt{f}||^2 \cdot ||\frac{1}{\sqrt{f}}||^2 = \Big(\int_a^b f(x)dx \Big) \cdot \Big(\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \Big).$$

On a égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{f} = \lambda \frac{1}{\sqrt{f}}$, c'est-à-dire si et seulement si f est une fonction constante.

Exercice 2

Soit $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1 - x, x - y, y - z, z)$.

1. Montrer que $\langle u, v \rangle = 1$.
2. En utilisant Cauchy-Schwarz, résoudre dans $\mathbb{R}^4$ l'équation : $(1-x)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$.

Solution. 1. On a $\langle u, v \rangle = (1 - x) + (x - y) + (y - z) + z = 1$.

2. En appliquant Cauchy-Schwarz on obtient $\langle u, v \rangle^2 \leq ||u||^2 \cdot ||v||^2$ c'est-à-dire :

$$1 \leq 4 \cdot \big((1-x)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2 \big) \iff (1-x)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2 \geq \frac{1}{4}.$$

De plus on a égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 1 - x = \lambda \\ x - y = \lambda \\ y - z = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 4\lambda \\ x = 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3/4 \\ y = 1/2 \\ z = 1/4 \end{cases}$$

L'équation a donc une unique solution $(x, y, z) = (3/4, 1/2, 1/4)$.

Exercice 3

Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ on pose

$$\varphi(u, v) = axx' + byy' + cx'y + dxy'$$

A quelles conditions sur a, b, c, d, a-t-on φ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

Solution. La matrice de φ dans la base canonique est $\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$. Pour que φ soit symétrique on doit donc avoir $c = d$. Pour que φ soit définie positive, on doit avoir

$$\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = a > 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = b > 0.$$

On a donc

$$\varphi(u, u) = ax^2 + by^2 + 2cxy = a(x + \frac{c}{a}y)^2 + (b - \frac{c^2}{a})y^2 \geq 0.$$

Pour que b soit définie positive, on doit avoir $b - \frac{c^2}{a} > 0$.

Réciproquement, si $a, b > 0$, $c = d$ et $b - \frac{c^2}{a} > 0$, le raisonnement ci-dessus montre que φ est symétrique et définie positive. C'est donc un produit scalaire.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}^2$.

1. Prouver que la forme bilinéaire b représentée dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de E par la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est un produit scalaire sur E.

2. En déduire que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, |2x+3y| \leqslant \sqrt{5}\cdot\sqrt{x^2+2xy+2y^2}$.

Solution. 1. La forme b est symétrique puisque sa matrice représentative est symétrique. Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On a

$$b(u,u) = (x,y)\cdot B\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2+2y^2+2xy = (x+y)^2+y^2 \geq 0$$

et donc b est positive. De plus

$$b(u,u)=0 \Longleftrightarrow (x+y)^2+y^2=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Ce système a une unique solution $x=y=0$ et donc b est définie positive.

2. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} b(u,v) &= x+2y+y+x = 2x+3y \\ b(u,u) &= ||u||^2 = 5 \\ b(v,v) &= ||v||^2 = x^2+2y^2+2xy. \end{aligned}$$

En appliquant Cauchy-Schwarz dans l'espace (E,b) aux vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on obtient donc pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$|b(u,v)| \leq ||u||||v|| \Longleftrightarrow |2x+3y| \leq \sqrt{5}\sqrt{x^2+2y^2+2xy}$$

Exercice 5

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

1. Prouver que l'application b de E^2 vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$b(f,g) = f(0)\cdot g(0) + \int_0^1 f'(t)\cdot g'(t)dt$$

   est un produit scalaire sur E.
2. Définir la norme $||\cdot||$ issue de b.
3. Prouver que pour tout f de E : $|f(0)+\int_0^1 f'(t)dt| \leqslant \sqrt{2}\cdot\sqrt{f^2(0)+\int_0^1 (f'(t))^2 dt}$.

Solution. Soient $f.g,h \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} b(f+\lambda g,h) &= (f+\lambda g)(0)\cdot h(0) + \int_0^1 (f+\lambda g)'(t)\cdot h'(t)dt \\ &= f(0)\cdot h(0) + \lambda g(0)\cdot h(0) + \int_0^1 f'(t)\cdot h'(t) + \lambda g'(t)\cdot h'(t)dt \\ &= f(0)\cdot h(0) + \lambda g(0)\cdot h(0) + \int_0^1 f'(t)\cdot h'(t)dt + \lambda\int_0^1 g'(t)\cdot h'(t)dt \\ &= f(0)\cdot h(0) + \int_0^1 f'(t)\cdot h'(t)dt + \lambda\Big(g(0)\cdot h(0) + \int_0^1 g'(t)\cdot h'(t)dt\Big) \\ &= b(f,h)+\lambda b(g,h). \end{aligned}$$

De plus b est symétrique puis que

$$b(f,g) = f(0)\cdot g(0) + \int_0^1 f'(t)\cdot g'(t)dt = g(0)\cdot f(0) + \int_0^1 g'(t)\cdot f'(t)dt = b(g,f)$$

et donc b est bien une forme bilinéaire symétrique. Montrons que b est définie positive :

$$b(f,f) = f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0.$$

De plus, comme les deux termes sont positifs, $b(f,f) = 0$ si et seulement si $f(0) = 0$ et $\int_0^1 f'(t)^2 dt = 0$. Comme $f'(t)^2 \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et f' est continue sur $[0,1]$, l'intégral vaut 0 si et seulement si $f'(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Ainsi f est constante mais comme $f(0) = 0$, on obtient que f est la fonction nulle.

2. Soit $f \in E$. On a

$$||f|| = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt}$$

3. Soit $g \in E$ la fonction définie par $g(t) = t - 1$. On a alors

$$\begin{aligned} b(f,g) &= f(0) \cdot g(0) + \int_0^1 f'(t) \cdot g'(t) dt = f(0) + \int_0^1 f'(t) dt \\ b(g,g) &= ||g||^2 = g(0)^2 + \int_0^1 g'(t)^2 dt = 2 \end{aligned}$$

En appliquant Cauchy-Schwarz à f, g on obtient

$$b|(f,g)| \leq ||g|| \cdot ||f|| \iff |f(0) + \int_0^1 f'(t) dt| \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt}.$$

Exercice 6

On note $E = l^2(\mathbb{N};\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles “de carré sommable” :

$$E = \{u = (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \quad \text{converge}\}.$$

1. Soient u et v deux suites de E et n_0 un entier naturel.
   (a) Prouver que :
   $$\left(\sum_{n=0}^{n_0} |u_n v_n|\right)^2 \leqslant \sum_{n=0}^{n_0} u_n^2 \cdot \sum_{n=0}^{n_0} v_n^2.$$
   (b) En déduire que la série de terme général $u_n \cdot v_n$ est absolument convergente, puis que E est un espace vectoriel réel.
2. Prouver que l'application $\langle .,. \rangle$ de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par : $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \cdot v_n$ est un produit scalaire sur E. L'espace $(E; \langle .,. \rangle)$ est-il euclidien ?
3. Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $(E; \langle .,. \rangle)$ en précisant ses cas d'égalité et définir la norme euclidienne associée à $\langle .,. \rangle$.

Exercice 7

Soit $(E; \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1. Soient u et v deux vecteurs non nuls de E. Justifier l'existence et l'unicité de $\theta \in [0, \pi]$ tel que : $\langle u, v\rangle = \cos(\theta).||u||.||v||$. On appelle θ la mesure de l'angle géométrique des vecteurs u et v.
2. Une famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ de vecteurs de E est dite à angles obtus (ou obtusangle) si et seulement si, pour tout $i \neq j$ on a $\langle u_i, u_j\rangle < 0$. Justifier l'expression : "famille à angles obtus".
3. Soit $(u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille à angles obtus. Montrer que pour tout $(a_1, a_2, ..., a_p) \in \mathbb{R}^p$ on a :
   $$||\sum_{i=1}^{p} |a_i|.u_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{p} a_i.u_i||.$$
4. Prouver que, dans un espace euclidien de dimension n, toute famille à angles obtus contient au plus $n + 1$ vecteurs.
   [Indication : Prouver que si $(u_1, ..., u_{n+2})$ était une famille à angles obtus, alors la famille $(u_1, ..., u_{n+1})$ serait libre.]
5. Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, construire une famille de trois vecteurs unitaires à angles obtus.

Exercice 8

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout $u, v \in E$ on a $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.