CHAPITRE 9 : PRIMITIVES - INTEGRALES

1. Primitives d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Une fonction F est une primitive de f sur I, si et seulement si, elle est dérivable sur I et pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$

Exemple

La fonction $f : x \mapsto 10x + 3$ admet pour primitive sur $\mathbf{R}$ la fonction $F : x \mapsto 5x^2 + 3x$

f admet aussi la fonction $F_1 : x \mapsto 5x^2 + 3x + 2$ pour primitive sur $\mathbf{R}$; en effet

$$F'(x) = F_1'(x) = f(x) = 10x + 3$$

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I

Toute primitive de f sur I est de la forme $G : x \mapsto F(x) + C$ où C est une constante réelle

Démonstration

G est dérivable sur I et $G' = F' = f$

Donc, $\forall x \in I \ , \ G'(x) - F'(x) = (G-F)'(x) = 0$

Puisque $(G-F)' = 0$ sur *I*, alors d'après un théorème du chapitre dérivation $G - F = C$

où C est une constante réelle

Par conséquent : $\forall x \in I \ , \ G(x) = F(x) + C$

Interprétation graphique : les courbes représentatives des fonctions primitives de *f* se déduisent les unes des autres par les translations de vecteur $C\vec{j}$ avec $C \in \mathbf{R}$

Exemple

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 3x - 5$

Déterminer les primitives *F* de *f* sur $\mathbf{R}$.

f est une fonction polynôme, donc f est continue sur $\mathbf{R}$ et elle admet des primitives sur $\mathbf{R}$.

D'après le tableau des primitives usuelles, les fonctions :

$$x \mapsto x^4, \quad x \mapsto x^3, \quad x \mapsto x^2, \quad x \mapsto x, \quad x \mapsto 1$$

admettent respectivement pour primitives les fonctions :

$$x \mapsto \frac{x^5}{5}, \quad x \mapsto \frac{x^4}{4}, \quad x \mapsto \frac{x^3}{3}, \quad x \mapsto \frac{x^2}{2}, \quad x \mapsto x$$

La fonction f admet pour primitives sur $\mathbf{R}$ les fonctions *F* :

$$F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + C \ , \ où \ \ C \in \mathbf{R}$$

Exemple

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \cos 4x - 3\sin 2x + \cos x$

Déterminer les primitives *F* de *f* sur $\mathbf{R}$.

La fonction *f* est continue sur $\mathbf{R}$ et elle admet des primitives sur $\mathbf{R}$.

D'après le tableau des primitives usuelles, les fonctions :

$$x \mapsto \cos 4x, \quad x \mapsto \sin 2x, \quad x \mapsto \cos x$$

admettent respectivement pour primitives les fonctions :

$$x \mapsto \frac{1}{4}\sin 4x, \quad x \mapsto -\frac{1}{2}\cos 2x, \quad x \mapsto \sin x$$

La fonction *f* admet pour primitives sur $\mathbf{R}$ les fonctions *F* :

$$F(x) = \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{3}{2}\cos 2x + \sin x + C \ , \ \textit{où} \ \ C \in \mathbf{R}$$

2. Primitive prenant une valeur donnée en un point donné

Théorème

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I*. Soit x_0 un réel appartenant à *I* et y_0 un réel quelconque.

Alors, il existe une primitive *F* de *f*, et une seule, telle que $F(x_0) = y_0$

Démonstration

Soit *F* une primitive de *f* sur *I*, alors d'après le théorème précédent, toute primitive de *f* sur *I* est une fonction *G* de la forme

$$G : \ x \mapsto F(x) + C \quad \textit{avec} \quad C \in \mathbf{R}$$

La condition $G(x_0) = y_0$ donne $F(x_0) + C = y_0 \quad \textit{ou} \ \ \textit{encore} \ \ C = y_0 - F(x_0)$

Puisque nous avons trouvé une valeur et une seule de C, il existe donc une primitive et une seule de *f* sur *I* telle que $F(x_0) = y_0$, soit la fonction $F : \ x \mapsto F(x) + y_0 - F(x_0)$

Interprétation graphique

Parmi toutes les courbes représentant les primitives de *f* sur *I*, il en existe une et une seule passant par le point de coordonnées (x_0, y_0)

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$

Déterminer la primitive *F* de *f* sur $\mathbf{R}$ qui s'annule en 1

L'ensemble des primitives de f sur $\mathbf{R}$ sont les fonctions

$$F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x+C \quad avec \quad C\in\mathbf{R}$$

La condition $F(1)=0$ impose

$$F(1)=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2+C=0$$

soit

$$C=-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2=-\frac{5}{6}$$

La primitive de f qui s'annule pour $x=1$ est la fonction $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{5}{6}$

Exemple

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f: x\mapsto \sin 2x$

Déterminer la primitive *F* de *f* sur $\mathbf{R}$ qui prend la valeur 1 pour $x=\frac{\pi}{2}$

L'ensemble des primitives de *f* sur $\mathbf{R}$ sont les fonctions $F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+C \quad avec \quad C\in\mathbf{R}$

La condition $F(\frac{\pi}{2})=1$ impose

$$F(\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{2}\cos\pi+C=1$$

soit

$$C=\frac{1}{2} \quad puisque \quad \cos\pi=-1$$

La primitive de *f* qui prend la valeur 1 pour $x=\frac{\pi}{2}$ est la fonction $F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$

3. Primitives des fonctions usuelles

La lecture à l'envers du tableau donnant les fonctions dérivées des fonctions usuelles permet de dresser un premier tableau de primitives usuelles.

Fonction f définie par	Primitive F de f	Sur I
$f(x)=a$ où a est une constante	$F(x)=ax+C,\ C\in\mathbf{R}$	$I=\mathbf{R}$
$f(x)=x^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ C\in\mathbf{R}$	$I=\mathbf{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}+C,\ C\in\mathbf{R}$	$I=\left]0,+\infty\right[$ *ou* $I=\left]-\infty,0\right[$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+C,\ C\in\mathbf{R}$	$I=\left]0,+\infty\right[$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+C,\ C\in\mathbf{R}$	$I=\mathbf{R}$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+C,\ C\in\mathbf{R}$	$I=\mathbf{R}$
$f(x)=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\tan x+C,\ C\in\mathbf{R}$	$I=\left]-\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right[,n\in\mathbf{N}$

4. Opérations sur les primitives

Propriété

Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors:

- $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I
- $\forall k\in\mathbf{R}$, kF est une primitive de kf sur I

Le tableau suivant découle des règles de dérivation des fonctions.

u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction f	$\text{Pr}\,imitives\ F\ \ sur\ I$	I
$u'u^n\ \ (n\in\mathbf{N}^*)$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}+C\ ,\ C\in\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}+C\ ,\ C\in\mathbf{R}$	$\forall x\in I\ \ avec\ \ u(x)\neq 0$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+C\ ,\ C\in\mathbf{R}$	$\forall x\in I\ \ avec\ \ u(x)>0$
$\dfrac{u'}{u^n}(n\in\mathbf{N},n\geq 2)$	$-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{u^{n-1}}+C\ ,\ C\in\mathbf{R}$	$\forall x\in I\ \ avec\ \ u(x)\neq 0$

Exemple

Déterminer les primitives de la fonction $f\ :\ x\mapsto x(1+x^2)^3$ sur $\mathbf{R}$

La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$, l'intégrale existe

Posons $u(x)=1+x^2$ alors $u'(x)=2x$ et $f(x)=\dfrac{1}{2}u'(x)\ u^3(x)$

Les fonctions F définies sur $\mathbf{R}$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{4}u^4(x)+C=\dfrac{1}{8}(1+x^2)^4+C\ \ avec\ \ C\in\mathbf{R}$ sont les primitives de *f* sur $\mathbf{R}$.

Exemple

Déterminer les primitives de la fonction $f\ :x\mapsto\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ sur $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

Sur $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, le cosinus ne s'annule pas et la fonction *f* est continue sur cet intervalle

Posons $u(x)=\cos x$ alors $u'(x)=-\sin x$ et $f(x)=-\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$

Les fonctions F définies sur $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\dfrac{1}{u(x)}+C=\dfrac{1}{\cos x}+C\ \ avec\ \ C\in\mathbf{R}$ sont les primitives de *f* sur *I*.

Exemple

Déterminer les primitives de la fonction $f\ :x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{3x+5}}$ sur $I=\left]-\dfrac{5}{3},+\infty\right[$

Sur $I = \left]-\frac{5}{3}, +\infty\right[$, $(3x+5) > 0$ et la fonction f est continue sur cet intervalle

Posons $u(x) = 3x+5$ alors $u'(x) = 3$ et $f(x) = \frac{1}{3}\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

Les fonctions F définies sur $I = \left]-\frac{5}{3}, +\infty\right[$ par

$F(x) = \frac{1}{3}.2\sqrt{u(x)} + C = \frac{2}{3}\sqrt{3x+5} + C \ \ avec \ \ C \in \mathbf{R}$ sont les primitives de *f* sur $I = \left]-\frac{5}{3}, +\infty\right[$.

5. Définition d'une intégrale

Soient *f* une fonction définie sur un intervalle *I* et *F* une de ces primitives, soient *a* et *b* deux points de *I*.

La quantité $F(b) - F(a)$ (encore notée $\left[F(x)\right]_a^b$) est appelée intégrale de *f* entre *a* et *b* et est notée

$\int_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx$ se lit « somme de *a* à *b* de *f* » (ou de *f(x)dx*)

Attention

l'ordre de *a* et de *b* est important

Le nombre *a* est appelé borne inférieure et *b* la borne supérieure de l'intégrale.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarque

1) la variable *x* apparaissant dans l'intégrale est une variable muette, on peut aussi écrire : $\int_a^b f(t)\,dt \ \ ou \ \int_a^b f(\theta)\,d\theta$

2) En faisant $a = b$ *alors* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3) Le résultat du calcul d'une intégrale ne dépend pas de la primitive choisie

En effet si F *et* F_1 sont deux primitives de *f*, alors elles diffèrent d'une constante

$$F_1 = F + C \quad avec \quad C \in \mathbf{R}$$

et

$$\left[F_1(x)\right]_a^b = \left[F(x)+C\right]_a^b = \left(F(b)+C\right)-\left(F(a)+C\right) = F(b)-F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$$

En pratique, pour la plupart des exemples, on ne tient pas compte de la constante d'intégration.

Exemple Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{2} (2x^2+3)\,dx$

L'intégrale existe puisque la fonction $f(x) = 2x^2+3$ est continue sur $\left[-1,2\right]$

La fonction f admet pour primitive la fonction F(x)=$\frac{2}{3}x^3+3x$ sur $\left[-1,2\right]$

(On prend la plupart du temps la primitive ne faisant pas apparaître la constante réelle *C*)

et donc $\int_{-1}^{2} (2x^2+3)\,dx = F(2)-F(-1) = \left[\frac{2}{3}x^3+3x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{16}{3}+6\right)-\left(-\frac{2}{3}-3\right) = 15$

Exemple Calculer l'intégrale $\int_0^1 (\sqrt{x}-1)^2\,dx$

La fonction $f : x \mapsto (\sqrt{x}-1)^2$ est continue sur $\left[0,1\right]$, l'intégrale existe

Développons le carré : $(\sqrt{x}-1)^2 = x - 2\sqrt{x}+1 = x - 2x^{1/2}+1$

Une primitive de *f* est la fonction $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + x = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}+x$

(On prend la plupart du temps la primitive ne faisant pas apparaître la constante réelle *C*)

Alors $\int_0^1 (\sqrt{x}-1)^2\,dx = F(1)-F(0) = \left[x^2 - \frac{4}{3}\sqrt{x^3+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{4}{3}+1 = \frac{1}{6}$

6. Intégrale et aire.

Soit (*C*) la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthogonal.

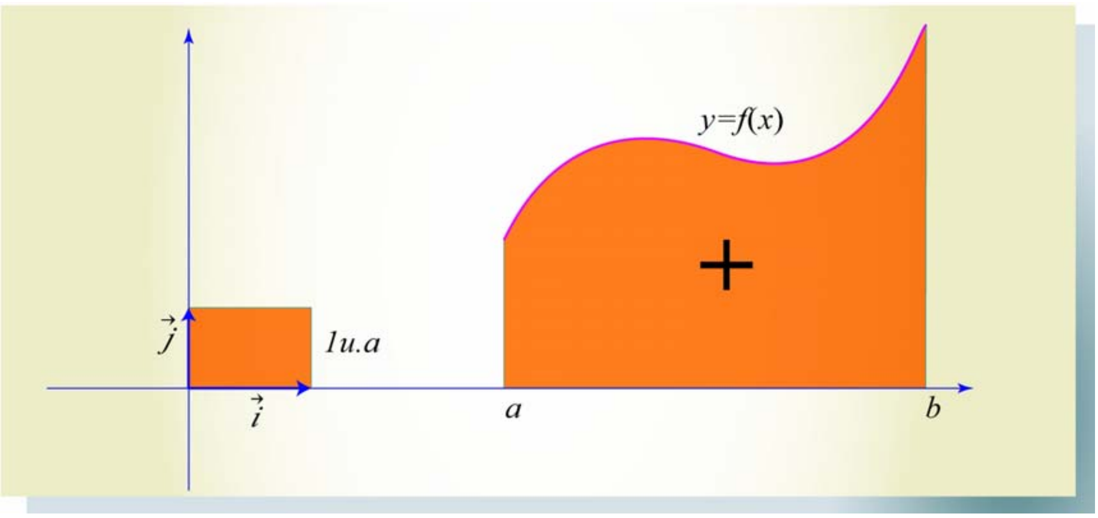
D est la région du plan délimité par (*C*), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ *et* $x = b$.

L'unité d'aire est l'aire du rectangle engendré par le repère choisi.

Théorème

Cas d'une fonction positive

Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalla $[\,a\,, b\,]$, l'aire de D , mesurée en unités d'aire, est égale à $\int_a^b f(x)\,dx$

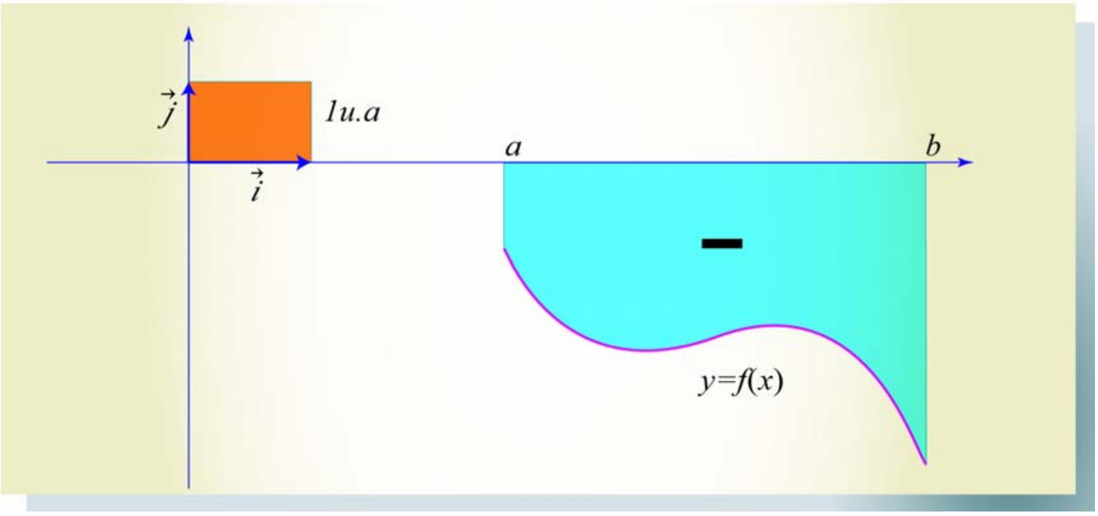


$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Aire } (D)$$

Corollaire

- Cas d'une fonction négative

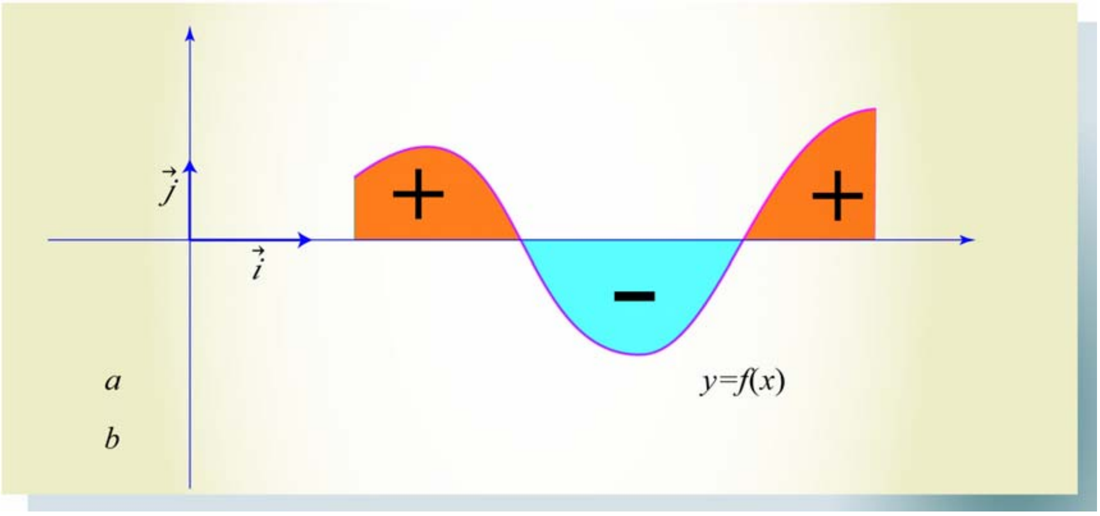
Si f est une fonction continue et négative sur l'intervalle $[\,a\,,b\,]$, l'aire de D , mesurée en unités d'aire, est égale à $-\int_a^b f(x)\,dx$



$$\int_a^b f(x)\,dx = -\text{ Aire } (D)$$

- Cas d'une fonction de signe quelconque

Si f est une fonction continue et de signe quelconque sur l'intervalle $[\,a\,,b\,]$, l'aire de D, mesurée en unités d'aire, est égale à la somme des aires des domaines situés au-dessus de l'axe des abscisses, diminué de la somme des aires des domaines situés au-dessous de l'axe des abscisses



$$\int_a^c f(x)\,dx = \text{Aire }(D_1),\ \int_c^d f(x)\,dx = -\text{Aire }(D_2) \text{ et } \int_d^b f(x)\,dx = \text{Aire}(D_3)$$

on a donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Aire }(D_1) - Aire(D_2) + Aire(D_3)$$

Exemple

Dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm, on considère la partie D du plan délimitée par l'axe des abscisses, l'arc de courbe d'équation $y = x(x-1)(x-4)$ avec $1 \le x \le 4$

Calculer l'aire du domaine D

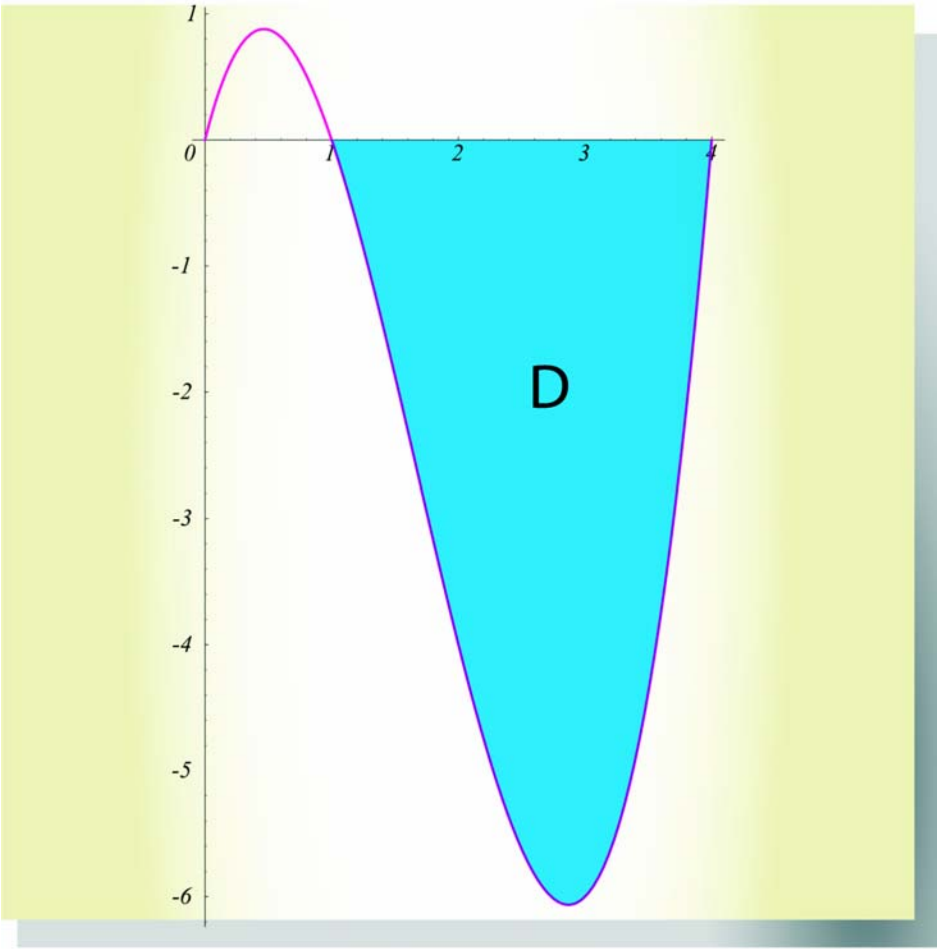
Une unité d'aire est égale à $4\,cm^2$

Sur l'intervalle $[1,4]$, la fonction $f(x) = x(x-1)(x-4)$ est continue et négative.

L'aire du domaine D est égale à

$$\text{Aire}(D) = -\int_1^4 x(x-1)(x-4)\,dx = \int_1^4 (-x^3 + 5x^2 - 4x)\,dx$$

Soit $Aire(D) = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - 2x^2\right]_1^4 = 11,25\ \ unités\ \ d'aire = 11,25x4\ cm^2 = 45\ cm^2$


1
0
1
2
3
4
-1
-2
-3
-4
-5
-6
D