L2 UNIVERSITÉ RENNES 2 **Algèbre IV pour MIASHS** 2018–2019

Examen du 26 avril 2019 - Durée 2 heures

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Problème. On se place dans $\mathbb{R}^2$. On note x les vecteurs colonnes dont les coordonnées sont x_1 et x_2. Ainsi :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv {}^t(x_1, x_2), \qquad {}^t x = (x_1, x_2).$$

On pose :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^2\,, \qquad q(x) := 6\,x_1^2 - 4\,x_1\,x_2 + 9\,x_2^2. \tag{1}$$

Etant donnés $x = {}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = {}^t(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on note $B(x, y)$ la forme bilinéaire symétrique associée à $q(\cdot)$ de sorte que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^2\,, \qquad q(x) = B(x, x) = {}^t x\, S\, x, \qquad S = {}^t S. \tag{2}$$

1. Effectuer une réduction de Gauss de la forme quadratique $q(\cdot)$, ceci en commençant par absorber la variable x_1.
2. En déduire que l'application $q(\cdot)$ est une forme quadratique définie positive.
3. Expliciter $B(x, y)$ ainsi que le contenu de la matrice S.
4. Quelle est la propriété vérifiée par S qui permet d'affirmer que S est diagonalisable ? Comment peut être choisie la matrice de passage O qui diagonalise S ?
5. On note λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de S ordonnées selon $\lambda_1 < \lambda_2$. Vérifier qu'on a $\lambda_1 = 5$ et trouver la valeur de λ_2. On pose :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

6. On note v_1 et v_2 deux vecteurs propres (normalisés par le produit scalaire usuel) associés respectivement à λ_1 et λ_2. Identifier (au signe près) v_1 et v_2.
7. Identifier une matrice orthogonale O permettant de diagonaliser la matrice S en la matrice D.
8. Exprimer de deux façons S en fonction de D et de O.

9. Dans (2), remplacer S en fonction de O et D comme indiqué ci-dessus, et en déduire l'écriture suivante de $q(\cdot)$ sous forme de somme de carrés :
$$q(x) = (2\,x_1 + x_2)^2 + 2\,(-x_1 + 2\,x_2)^2\,.$$
10. Soit F le sous-espace vectoriel de dimension 1 défini par :
$$F := \{\, x = {}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1 - 2\,x_2 = 0 \,\} \subset \mathbb{R}^2.$$
Montrer que F est engendré par v_1. Déterminer une base orthonormale (e_1) de F pour le produit scalaire associé à $B(\cdot)$. Pourquoi a-t'on $v_1 \neq e_1$?
11. Montrer que $B(v_1, v_2) = 0$, et en déduire une base orthonormale (e_2) de
$$F^\perp := \{\, x = {}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, \forall y \in F\,,\, B(x, y) = 0 \,\}$$
pour le produit scalaire associé à $B(\cdot)$.
12. Que peut-on dire du couple de vecteurs (e_1, e_2) ?
13. En partant de la base de $\mathbb{R}^2$ formée des deux vecteurs $f_1 = {}^t(0, 1)$ et $f_2 = {}^t(1, 0)$, à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, extraire une base orthonormale (g_1, g_2) de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire associé à $B(\cdot)$.
14. On note P la matrice qui fait le passage de la base (e_1, e_2) à la base (g_1, g_2). Quelle propriété est vérifiée par P ? Quitte à changer e_1 en $-e_1$ de façon à ce que $\det P = 1$, quelle est la transformation géométrique associée à l'action de P ?

Exercice. On se place sur $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel :
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \qquad \| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$
1. Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Soit $u = {}^t(u_1, u_2, u_3)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. On introduit la matrice :
$$H(u) := Id - 2\,u\,{}^tu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} (u_1, u_2, u_3).$$
a) Montrer que $H(u)$ est symétrique.

b) Montrer que $H(u)$ est orthogonale.

c) Montrer que $H(u)$ vérifie $\big(H(u)\,x + x\big) \perp u$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.
3. On note $\tilde H$ la matrice $H(\tilde u)$ obtenue à partir de $\tilde u = {}^t(1, 1, 1)/\sqrt{3}$. On considère :
$$A = \begin{pmatrix} +1 & -2 \\ -2 & +2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
a) Calculer $\tilde H$ puis $\tilde H A$ et $\tilde H b$.

b) Expliquer pourquoi on a :
$$0 \leq m := \inf_{y = {}^t(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2} \| A\,y - b \|^2 = \inf_{y = {}^t(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2} \| \tilde H A\,y - \tilde H b \|^2\,.$$
c) Montrer que l'infimum m est atteint en un unique point $y = {}^t(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On demande de déterminer la valeur de m ainsi que les coordonnées de y.