Master 1 de Mathématiques — 2017-2018
Distributions et analyse de Fourier — Université Rennes 1 & ENS Rennes

Contrôle continu

Vendredi 20 avril 2018 - durée : 2 heures

****

Les notes de cours personnelles sont autorisées.
Tous les autres documents (dont les notes des TD) sont interdits.
Le soin dans la rédaction et dans la justification des arguments sera pris en compte dans la note.

****

Pour $d \geq 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact sur Ω et $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^d$.
Pour f une fonction localement intégrable de Ω dans $\mathbb{R}$, on définie T_f comme la distribution définie par

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Questions de cours:
Etant donné deux distributions S et T, quand est il possible de définir leur produit de convolution $T * S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$? Dans ce cas, rappeler la définition de celui-ci et donner une condition pour que $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 1 Pour chacune des fonctions f données ci-dessous, dire si elle définit un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et si T_f est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

a. $f(x) = e^{-x^2}$; b. $f(x) = e^{x^2}$; c. $f(x) = e^{-x^2} \sin e^{x^2}$.

Exercice 2
On définit T par : $\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \partial_1\varphi(x, x^3)dx,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. ($\partial_1\varphi$ est la dérivé partielle de φ par rapport à la première variable).
1. Montrer que T est dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
2. Montrer que $T \not\equiv 0$ et déterminer son support ?
3. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f localement intégrable sur $\mathbb{R}^2$ telle que $T = T_f$.

Exercice 3 1. Dire pourquoi la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x) = e^{ix}$ est une distribution tempérée.
2. Soit $\epsilon > 0$, montrer que la transformée de Fourier de $f_\epsilon(x) = e^{ix-\epsilon|x|}$ est donnée par

$$\hat{f}_\epsilon(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\,x\,\xi}\ e^{ix-\epsilon\,|x|}\ d\xi = \frac{2\epsilon}{\epsilon^2 + (1-\xi)^2}\,.$$

3. Montrer que la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la distribution $T_{\hat{f}_\epsilon}$ associée à $\hat{f}_\epsilon$ est $C\delta_1$ pour une constante C à préciser.
4. En déduire la transformée de Fourier de f.

Exercice 4
Pour $a \in \mathbb{R}$ et f localement intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose $\tau_a f(x) = f(x-a)$. Pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on définit la distribution $\tau_a T$ par

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle = \langle T, \varphi(\cdot + a) \rangle \,, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,.$$

1. Soit $a > 0$ et $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, montrer que la formule

$$\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(x - na)$$

définit une fonction dans $C^\infty(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si $\chi \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ et $\chi(x) > 0$ pour $x \in [0, a]$ alors $\theta > 0$ sur $\mathbb{R}$. En déduire la construction de $\Theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vérifie:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{na}\Theta(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Soit T une distribution périodique de période a (c'est à dire $\tau_a T = T$). Montrer que

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle T, \Theta \tau_{-na}\varphi \rangle \,, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

4. Soit T une distribution périodique de période a, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ et un entier $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{|\alpha| \leq k,\, x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x + na)|, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

où K est le support de Θ.

5. Montrer que les distributions périodiques sont dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.