UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions de la variable réelle

Corrigé de l'examen de seconde session
(le 16/06/2016)

Questions de cours.

1. *(1 pt)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels. Rappeler la définition de ce qu'est la borne supérieure de l'ensemble $A := \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Cours.

2. *(1 pt)* On se donne $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On considère $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Que signifie l'affirmation "f est continue en a" ?

Cours.

3. *(1 pt)* Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Cours.

Exercice 1. Dans chacun des deux cas **1** et **2** suivants pour le choix de A, déterminer s'il y a pour A une borne supérieure. Si c'est oui, la calculer et préciser s'il s'agit d'un maximum.

1. *(1 pt)* Cas $A = \left\{ \dfrac{2^n}{2^n - 1} \, ; \, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

La fonction $x \longmapsto x/(x-1)$ *est strictement décroissante sur l'intervalle* $[1, +\infty[$ *et vaut* 2 *pour* $x = 2$. *Par conséquent,* $\sup A = 2$ *qui est atteint pour* $n = 1$, *de sorte que* $\max A = 2$.

2. *(1 pt)* Cas $A = \left\{ \dfrac{x^3}{|x^3 - 1|} \, ; \, x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\right\}$.

La fonction $x \longmapsto x^3/|x^3 - 1|$ *tend vers* $+\infty$ *pour* x *qui tend vers* 1. *Ainsi* $\sup A = +\infty$. *Il n'y a pas de maximum.*

Dans chacun des deux cas **3** et **4** suivants pour le choix de A, déterminer s'il y a pour A une borne inférieure. Si c'est oui, la calculer et préciser s'il s'agit d'un minimum.

3. *(1 pt)* Cas $A = \left\{ \dfrac{2^n}{2^n - 1} \, ; \, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

La fonction $x \longmapsto x/(x-1)$ *est strictement décroissante sur l'intervalle* $[1, +\infty[$ *et tend vers* 1 *en* $+\infty$. *Par conséquent, on trouve* $Inf A = 1$ *qui n'est pas un minimum.*

4. *(1 pt)* Cas $A = \left\{ \dfrac{x^3}{|x^3 - 1|} \, ; \, x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\right\}$.

La fonction $x \longmapsto x^3/|x^3 - 1|$ *est strictement positive sur* $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ *et tend vers* 0 *pour* x *qui tend vers* 0. *Par conséquent,* $Inf A = 0$ *qui n'est pas un minimum.*

Exercice 2. Déterminer si les limites suivantes existent et, si c'est oui, les calculer.

1. *(1 pt)* Cas $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

On dispose des développements limités suivants :

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)\,, \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\,.$$

Par conséquent :

$$\frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3\,x^2 + o(x^2)}{2\,x^2} = \frac{3}{2} + o(1)\,,$$

qui tend vers $3/2$ *lorsque* x *tend vers* 0.

2. *(1 pt)* Cas $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$.

On dispose des informations suivantes :

$$\ln x = \ln\big(1 + (x-1)\big) = x - 1 + o(|x-1|)\,, \qquad x^2 - 1 = (x-1)\,(x+1)\,.$$

Par conséquent :

$$\frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{1 + o(1)}{x+1}\,,$$

qui tend vers $1/2$ *lorsque* x *tend vers* 1.

Exercice 3.

1. *(1 pt)* Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1 + x + x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ son graphe.

On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \qquad 1 + x + x^2 = \frac{3}{4} + \big(x + (1/2)\big)^2 \geq \frac{3}{4}\,.$$

Par conséquent, la racine carrée est bien définie. Par ailleurs, le polynôme $x \longmapsto 1+x+x^2$ *est continu sur* $\mathbb{R}$*, tandis que* $x \longmapsto \sqrt{x}$ *est continu sur* $[0, +\infty[$*. Par composition de fonctions continues, la fonction* $x \longmapsto \sqrt{1 + x + x^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.

2. *(1 pt)* Déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Il suffit de rappeler ce qu'est le développement limité de $\sqrt{1+y}$ *en* $y = 0$*, puis de substituer* $x + x^2$ *à* y *ce qui donne :*

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2)\,, \qquad \sqrt{1 + x + x^2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}\,x^2 + o(x^2)\,.$$

3. *(1 pt)* En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe $\mathcal{C}$.

La tangente admet pour équation $y = 1 + (x/2)$*. Elle est située au dessous de* $\mathcal{C}$.

4. *(1 pt)* Montrer que $\mathcal{C}$ admet une droite asymptote D en $+\infty$ et déterminer l'équation de D.

*Une manière de faire est de mettre $x \in \mathbb{R}_+$ en facteur et de s'appuyer sur la question **2** en vue d'extraire :*

$$\sqrt{1+x+x^2} = x\,\sqrt{1+\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)} = x\,\Big[1+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)+\frac{3}{8}\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\Big)^2+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big]$$

$$= x+\frac{1}{2}+\frac{7}{8}\,\frac{1}{x}+o\Big(\frac{1}{x}\Big)\,.$$

Cela donne accès à l'équation de D, à savoir $y = x + (1/2)$.

5. *(1 pt)* Au voisinage de $+\infty$, positionner $\mathcal{C}$ par rapport à l'asymptote D.

La courbe $\mathcal{C}$ est asymptotiquement au dessus de D car $7/8\,x$ est positif.

6. *(1 pt)* Etudier le comportement (à savoir convergeant ou divergeant) lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite définie par $\big(\sin \pi\, f(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après ce qui précède :

$$\sin \pi\, f(n) = \sin\Big(\pi\, n+\frac{\pi}{2}+o(1)\Big) = (-1)^n\ \sin\Big(\frac{\pi}{2}+o(1)\Big) = (-1)^n + o(1)\,,$$

qui n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$. La suite est divergente.

Exercice 4. (2 pt) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution.

On pose $g(x) = f(x) - x$. On a $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. La fonction $g(\cdot)$ est continue sur $[0,1]$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'elle prend toutes les valeurs dans $[g(1), g(0)]$, en particulier 0. Ainsi, il existe $\bar{x} \in [0,1]$ tel que $g(\bar{x}) = 0$, c'est à dire $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Exercice 5. (1 pt) Montrer que l'équation $x^5 - 5\,x + 1 = 0$ admet trois racines rélles.

On pose $p(x) = x^5 - 5\,x + 1$. La fonction polynomiale $p(\cdot)$ tend vers $\pm\infty$ pour x qui tend vers $\pm\infty$. Par ailleurs, $p(0) = 1$ et $p(1) = -3$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on obtient au moins trois racines réelles, situées dans les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. La dérivée de $p(\cdot)$ est $p'(x) = 5\,(x^4-1)$. La fonction $p(\cdot)$ est donc strictement croissante sur $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$. Elle est strictement décroissante sur $]-1,1[$. Cela montre que le décompte des racines est exhaustif.

PS : Il ne suffit pas de trouver trois racines (en appliquant comme ci-dessus le théorème des valeurs intermédiaires). Encore faut-il prouver qu'il n'y en a pas 4 ou 5 !

Exercice 6. (2 pt) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers a existe et vaut l. Montrer que f est dérivable à droite de a.

Le théorème des accoissements finis entre a *et* x *donne l'existence de* $c_x \in]a, x[$ *tel que* $(f(x) - f(a))/(x - a) = f'(c_x)$. *Comme* c_x *tend vers* a *lorsque* x *tend vers* a, *le quotient différentiel tend vers* l *lorsque* x *tend vers* a, *ce qui prouve que* $f(\cdot)$ *est dérivable à droite de* a, *de dérivée égale à* l.