Corrigé de l'examen en Algèbre IV de 2019

Problème. On se place dans $\mathbb{R}^2$. On note x les vecteurs colonnes dont les coordonnées sont x_1 et x_2. Ainsi :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv {}^t(x_1, x_2), \qquad {}^t x = (x_1, x_2).$$

On pose :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^2\,, \qquad q(x) := 6\,x_1^2 - 4\,x_1\,x_2 + 9\,x_2^2. \tag{1}$$

Etant donnés $x = {}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $y = {}^t(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on note $B(x, y)$ la forme bilinéaire symétrique associée à $q(\cdot)$ de sorte que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^2\,, \qquad q(x) = B(x, x) = {}^t x\, S\, x. \tag{2}$$

1. Effectuer une réduction de Gauss de la forme quadratique $q(\cdot)$, ceci en commençant par absorber la variable x_1.

   On commence par absorber la variable x_1 :

   $$q(x) = 6\left(x_1^2 - \frac{2}{3}\,x_1\,x_2\right) + 9\,x_2^2 = 6\left(x_1 - \frac{1}{3}\,x_2\right)^2 - \frac{2}{3}\,x_2^2 + 9\,x_2^2 = 6\left(x_1 - \frac{1}{3}\,x_2\right)^2 + \frac{25}{3}\,x_2^2\,.$$

2. En déduire que l'application $q(\cdot)$ est une forme quadratique définie positive.

   On a clairement $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Donc $q(\cdot)$ est positive. Par ailleurs, la condition $q(x) = 0$ impose $x_1 - x_2/3 = 0$ et $x_2 = 0$ ce qui équivaut à $x = (0, 0)$.

3. Expliciter $B(x, y)$ ainsi que le contenu de la matrice S.

   On trouve :

   $$B(x, y) = 6\,x_1\,y_1 - 2\,x_1\,y_2 - 2\,x_2\,y_1 + 9\,x_2\,y_2\,.$$

   Par ailleurs :

   $$S = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = {}^t S\,.$$

4. Quelle est la propriété vérifiée par la matrice S qui permet d'affirmer que S est diagonalisable ? Comment peut être choisie la matrice de passage ?

   La matrice S est symétrique réelle donc elle est (d'après le cours) orthogonalement diagonalisable. La matrice de passage peut être choisie orthogonale.

5. On note λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de S ordonnées selon $\lambda_1 < \lambda_2$. Vérifier qu'on a $\lambda_1 = 5$ et trouver λ_2. On pose :
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$
Le polynôme caractéristique issu de S est :
$$P(X) = (6 - X)\,(9 - X) - 4 = X^2 - 15\,X + 50 = (X - 5)\,(X - 10)\,.$$
Les valeurs propres sont réelles, égales à $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = 10$.

6. On note v_1 et v_2 deux vecteurs propres (normalisés par le produit scalaire usuel) associés respectivement à λ_1 et λ_2. Identifier (au signe près) v_1 et v_2.
Pour $\lambda_1 = 5$, on obtient :
$$6\,x_1 - 2\,x_2 = 5\,x_1 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Pour $\lambda_2 = 10$, on obtient :
$$6\,x_1 - 2\,x_2 = 10\,x_1 \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7. Identifier une matrice orthogonale O permettant de diagonaliser la matrice S en la matrice D.
La matrice orthogonale O se récupère à l'aide des vecteurs colonnes v_1 et v_2 via :
$$O = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad {}^tO = O^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Exprimer S en fonction de D et de O.
${}^tO\,S\,O = D$ *ou encore* $S = O\,D\,O^{-1} = O\,D\,{}^tO$.

9. Dans (2), remplacer S en fonction de O et D comme indiqué ci-dessus, et en déduire l'écriture suivante de $q(\cdot)$ sous forme de somme de carrés :
$$q(x) = (2\,x_1 + x_2)^2 + 2\,(-x_1 + 2\,x_2)^2\,.$$
Il s'agit là d'une réduction de Gauss de $q(\cdot)$, impliquant des directions orthogonales. Notant D la matrice diagonale obtenue après diagonalisation de S. On a :
$$\begin{aligned} q(x) &= {}^tx\,S\,x = {}^tx\,O\,D\,{}^tO\,x = {}^t({}^tO\,x)\,D\,({}^tO\,x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2\,x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2\,x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2\,x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2\,x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Ou encore :
$$q(x) = \frac{1}{5}\;5\;(2\,x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{5}\;10\;(-x_1 + 2\,x_2)^2 = (2\,x_1 + x_2)^2 + 2\;(-x_1 + 2\,x_2)^2\,.$$

10. Soit F le sous-espace vectoriel de dimension 1 défini par :

$$F := \{ \, x = {}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x_1 - 2\, x_2 = 0 \, \} \subset \mathbb{R}^2.$$

Montrer que F est engendré par v_1. Déterminer une base orthonormale (e_1) de F pour le produit scalaire associé à $B(\cdot)$. Pourquoi a-t'on $v_1 \neq e_1$?

Le sous-espace vectoriel F est engendré par v_1 puisque $v_1 \neq 0$ et $2 * 1 - 2 = 0$. Pour obtenir e_1, il suffit de normaliser v_1 via $B(\cdot)$ ce qui donne :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{q(v_1)}} \; v_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a $v_1 \neq e_1$ parce que $B(\cdot)$ n'est pas le produit scalaire usuel.

11. Montrer que $B(v_1, v_2) = 0$, et en déduire une base orthonormale (e_2) de

$$F^{\perp} := \{ \, x = {}^t(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, \forall y \in F \, , \, B(x, y) = 0 \, \}$$

pour le produit scalaire associé à $B(\cdot)$.

On calcule

$$B(v_1, v_2) = \frac{1}{5}(6*2*(-1)-2*2*2-2*1*(-1)+9*1*2) = \frac{1}{5}(-12-8+2+18) = 0.$$

Comme $B(\cdot)$ est non dégénérée, $F^{\perp}$ est de dimension 1 et engendré par v_2. Pour obtenir e_2, il suffit donc de normaliser v_2 via $B(\cdot)$ ce qui donne :

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{q(v_2)}} \; v_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

12. Que peut-on dire du couple de vecteurs (e_1, e_2) ?

C'est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire associé à $B(\cdot)$.

13. En partant de la base de $\mathbb{R}^2$ formée des deux vecteurs $f_1 = {}^t(0, 1)$ et $f_2 = {}^t(1, 0)$, à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, extraire une base orthonormale (g_1, g_2) de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire associé à $B(\cdot)$.

Le vecteur g_1 s'obtient en normalisant f_1 via $B(\cdot)$ ce qui donne :

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{q(f_1)}} \; f_1 = \frac{1}{3} \, f_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puis on va chercher g_2 via :

$$g_2 = \frac{1}{\sqrt{q(g_2')}} \; g_2' \, , \qquad g_2' = f_2 - B(f_2, g_1) \; g_1 \, ,$$

ce qui fournit :

$$g_2 = \frac{1}{15\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} , \qquad g_2' = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

14. On note P la matrice qui fait le passage de la base (e_1, e_2) à la base (g_1, g_2). Quelle propriété est vérifiée par P ? Quitte à changer e_1 en $-e_1$, quelle est la transformation géométrique correspondant à l'action de P ?

    La matrice P est une matrice de passage entre deux bases orthonormales. On peut donc, sans avoir à calculer P, affirmer que la matrice P est orthogonale. Son déterminant vaut ± 1. Quitte à changer e_1 en $-e_1$, on peut faire en sorte que ce soit 1. Comme la dimension est deux, la transformation géométrique recherchée est une rotation (voir le cours).

Exercice. On se place sur $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel :

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \qquad \| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

1. Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   Voir le cours : $|\langle x, y\rangle| \leq \| x \| \| y \|$.

2. Soit $u = {}^t(u_1, u_2, u_3)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. On introduit la matrice :

$$H(u) := Id - 2\, u\, {}^t u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} (u_1, u_2, u_3).$$

   a) Montrer que $H(u)$ est symétrique.

   Il suffit de remarquer que :

$${}^t H(u) = I - 2\, {}^t(u\, {}^t u) = I - 2\, {}^t({}^t u)\, {}^t u = H(u).$$

   On peut aussi le constater sur le calcul direct de la matrice $H(u)$, à savoir :

$$H(u) = \begin{pmatrix} 1 - 2u_1^2 & -2u_1 u_2 & -2u_1 u_3 \\ -2u_1 u_2 & 1 - 2u_2^2 & -2u_2 u_3 \\ -2u_1 u_3 & -2u_2 u_3 & 1 - 2u_3^2 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

   b) Montrer que $H(u)$ est orthogonale.

   On peut calculer :

$${}^t H\, H = (I - 2\, u\, {}^t u)\,(I - 2\, u\, {}^t u) = I - 4\, u\, {}^t u + 4\, u\, ({}^t u \cdot u)\, {}^t u.$$

   Comme u est de norme 1, cela donne :

$${}^t H\, H = I - 4\, u\, {}^t u + 4\, \| u \|^2\, u\, {}^t u = I.$$

   On peut aussi vérifier à la main que les vecteurs colonnes de la matrice donnée en (3) sont orthonormés et 2 à 2 orthogonaux.

c) Montrer que $H(u)$ vérifie $\big(H(u)\,x + x\big) \perp u$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

On a en effet :

$$\begin{aligned}(H\,x + x)\cdot u &= \big(x - 2\,u\,(u\cdot x) + x\big)\cdot u = 2\ \big(x - (u\cdot x)\,u\big)\cdot u \\ &= 2\ x\cdot u - 2\ (u\cdot x)\,(u\cdot u) = 0\,.\end{aligned}$$

3. On note $\tilde{H}$ la matrice $H(\tilde{u})$ obtenue à partir de $\tilde{u} = {}^t(1,1,1)/\sqrt{3}$. On considère :

$$A = \begin{pmatrix} +1 & -2 \\ -2 & +2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $\tilde{H}$ puis $\tilde{H}A$ et $\tilde{H}b$.

On trouve :

$$\tilde{H} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{H}A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & +2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{H}b = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

b) Expliquer pourquoi on a :

$$0 \le m := \inf_{y={}^t(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2} \parallel A\,y - b \parallel^2 = \inf_{y={}^t(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2} \parallel \tilde{H}A\,y - \tilde{H}b \parallel^2 .$$

D'après la question 2.b), la matrice $\tilde{H}$ est orthogonale. Donc elle est inversible et conserve la norme. C'est une isométrie dont l'application ne change pas le calcul de la norme mise en jeu ci-dessus.

c) Montrer que l'infimum m est atteint en un unique point $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On demande de déterminer la valeur de m ainsi que les coordonnées de y.

D'après les questions a) et b), on a :

$$m = \inf_{y={}^t(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2} \big(3y_1 - 2y_2 - (1/3)\big)^2 + \big(2y_2 + (2/3)\big)^2 + (4/9).$$

Il s'ensuit que $m = 4/9$ tandis que $(y_1, y_2) = (-1/9)(1,3)$.