

Corrigé de l'examen final

(le 05/01/2015)

Questions de cours. Soit x un réel strictement positif et f une fonction sur $[0, x]$.

1. Quelles sont les hypothèses qui permettent d'écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f sur $[0, x]$ à l'ordre 3 (c'est-à-dire avec un reste où intervient la dérivée troisième de f) ? Ecrire cette formule.

Cf cours. Bien écrire le reste ...

2. On pose $f(t) = \ln(1+t)$. Justifier la possibilité d'écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f sur $[0, x]$ à l'ordre 3, et écrire cette formule.

Cf cours.

Exercice 1. On considère $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 4}$, et on pose $A := \{f(x) ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}\}$.

1. (0,5 point) Montrer que $\sup A$ vaut $+\infty$.

On commence par remarquer que $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2}$, puis on fait tendre x vers -2 pour obtenir $\sup A = +\infty$.

2. (0,5 point) Montrer que la partie A est minorée, et déterminer $\inf A$.

La fonction $f(\cdot)$ est positive. Pour $x = -1$, on obtient $m := \inf A = 0$.

3. (1 point) On pose $B := A \cap]-\infty, 1[$. Déterminer $a := \inf B$ et $b := \sup B$. L'ensemble B admet-il un minimum ? Et un maximum ?

On a $B = [0, 1[$ de sorte que $a = 0$ et $b = 1$. L'ensemble B admet 0 pour minimum, mais n'admet pas de maximum.

4. (1 point) Identifier $f([a, b])$ (justifier la réponse).

La fonction $g(\cdot)$ donnée par $g(x) = (x+1)/(x+2)$ est strictement croissante sur $[0, 1]$. Elle vaut $1/2$ en $x = 0$ et $2/3$ en $x = 1$. On a donc $f([a, b]) =]1/4, 4/9[$.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. (1 point) Montrer que : $\left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \right| \leq \frac{x^5}{5!}$.

La formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction $\cos(\cdot)$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$, entre 0 et x avec un reste à l'ordre 5 conduit à :

$$\cos x = 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} \sin(\theta x), \quad \theta \in]0, 1[.$$

Il suffit de passer à la valeur absolue.

2. (1 point) En déduire que : $\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$.

Faire $x = 1/2$ et calculer.

Exercice 3. On considère une suite de nombres réels $(u_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = 4$.

1. (1 point) Peut-on affirmer que la suite $(u_n)_n$ converge ? Justifier la réponse.

NON. Considérer par exemple la suite $u_n = (-1)^n$.

2. (1 point) Peut-on affirmer que la suite $(u_n)_n$ admet une sous-suite convergente ? Justifier la réponse.

OUI. On considère :

$$A_+ := \{n; u_n \geq 0\}, \quad A_- := \{n; u_n < 0\}, \quad A_- \cup A_+ = \mathbb{N}.$$

Le cardinal de A_- ou de A_+ est infini. Supposons par exemple que le cardinal de A_- est infini. On peut donc trouver une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, et telle que $\varphi(n) \in A_-$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On doit avoir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)}^2 = 4, \quad u_{\varphi(n)} < 0,$$

ce qui implique : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{u_{\varphi(n)}^2} = -2$.

3. (1 point) On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$u_n := n \left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{n+1}{n} \right), \quad v_n := \frac{1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

En s'appuyant sur un développement limité de la fonction exponentielle, montrer que les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont équivalentes pour n qui tend vers $+\infty$.

Il suffit de se souvenir du développement limité de e^x au voisinage de 0 à l'ordre 2 :

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ceci donne accès à :

$$2n^2 \left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{n+1}{n} \right) = 2n^2 \left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 1 + 2\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right),$$

qui converge vers 1 pour n qui tend vers $+\infty$.

Exercice 4. Soit $\gamma : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'arc paramétré défini par $\gamma(t) := \begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2 - 1}, \\ y(t) = \frac{t^2}{t - 1}. \end{cases}$

1. (1 point) Montrer que $\gamma(\cdot)$ admet une droite asymptote D à identifier.

Les fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ sont continues et bornées, sauf au voisinage de 1. On a une direction asymptotique puisque :

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 1} t(t+1) = 2.$$

On regarde alors :

$$\lim_{t \rightarrow 1} [y(t) - 2x(t)] = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t+2)}{t+1} = \frac{3}{2}.$$

Cela signifie que la droite d'équation $y = 2x + (3/2)$ est asymptote.

2. (1 point) Déterminer la position de l'arc par rapport à D .

Il suffit de calculer :

$$y(t) - 2x(t) - \frac{3}{2} = \frac{(t-1)(2t+3)}{2(t+1)},$$

qui est négatif pour $t \in [0, 1[$. L'arc est situé en dessous de D .

Problème.

On considère l'arc Γ paramétré par le chemin $\gamma : [-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\gamma(t) := \begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos(2t), \\ y(t) = 2 \sin t - \sin(2t). \end{cases}$$

Partie A. Etude de Γ . On rappelle les formules :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right), \quad \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

A.1. (1 point) Quelle est la transformation géométrique qui permet de ramener l'étude de Γ à celle de γ sur $[0, \pi[$? Justifier.

Le changement de t en $-t$ laisse $x(t)$ inchangé, et remplace $y(t)$ par $-y(t)$. On a affaire à une symétrie d'axe (Ox) .

A.2. (1 point) Etudier les variations de la fonction $x(\cdot)$ sur $[0, \pi[$.

Après dérivation, on trouve :

$$x'(t) = -2 \sin t + 2 \sin(2t) = 4 \sin(t/2) \cos(3t/2).$$

La fonction $x(\cdot)$ est croissante sur $[0, \pi/3]$ de $x(0) = 1$ à $x(\pi/3) = 3/2$. Elle est décroissante sur $[\pi/3, \pi]$ de $x(\pi/3) = 3/2$ à $x(\pi) = -3$.

A.3. (1 point) Etudier les variations de la fonction $y(\cdot)$ sur $[0, \pi]$.

Après dérivation, on trouve :

$$y'(t) = +2 \cos t - 2 \cos(2t) = 4 \sin(3t/2) \sin(t/2).$$

La fonction $y(\cdot)$ est croissante sur $[0, 2\pi/3]$ de $y(0) = 0$ à $y(2\pi/3) = 3\sqrt{3}/2$. Elle est décroissante sur $[2\pi/3, \pi]$ de $y(2\pi/3) = 3\sqrt{3}/2$ à $y(\pi) = 0$.

A.4. (1 point) Déterminer tous les points ordinaires, vérifiant $\gamma'(t) \neq 0$ et d'ordonnée positive ou nulle, en lesquels la tangente est parallèle à l'axe (Oy).

Pour que $\gamma'(t) \neq 0$ avec $t \in [0, \pi]$, il faut et il suffit que $t \neq 0$. De la formule donnant $\gamma'(t)$, on déduit facilement qu'un vecteur unitaire directeur de la tangente à Γ en M n'est autre que $\vec{u}(t) := (\cos(3t/2), \sin(3t/2))$. La tangente est alors parallèle à l'axe (Oy) pour $t = \pi/3$ et $t = \pi$, ce qui correspond respectivement aux points d'affixe $z = (3/2) + i\sqrt{3}/2$ et $z = -3$.

A.5. (1 point) Déterminer tous les points ordinaires, vérifiant $\gamma'(t) \neq 0$ et d'ordonnée positive ou nulle, en lesquels la tangente est parallèle à l'axe (Ox).

Pour que $\gamma'(t) \neq 0$ avec $t \in [0, \pi]$, il faut et il suffit que $t \neq 0$. La tangente est alors parallèle à l'axe (Ox) pour $t = 2\pi/3$, ce qui correspond au point d'affixe $z = -1/2 + i3\sqrt{3}/2$.

A.6. (1 point) Déterminer le(s) point(s) stationnaire(s). Préciser s'il s'agit de point(s) d'inflexion, de rebroussement de première espèce ou de rebroussement de seconde espèce.

On obtient un point stationnaire pour $t = 0$. On a alors $\gamma(0) = 1$. On calcule les développements limités :

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 \left[t - \frac{1}{6} t^3 + t^3 \varepsilon(t) \right] - \left[2t - \frac{1}{6} (2t)^3 + t^3 \varepsilon(t) \right] = t^3 + t^3 \varepsilon(t), \\ x(t) - 1 &= 2 \left[1 - \frac{1}{2} t^2 + t^2 \varepsilon(t) \right] - \left[1 - \frac{1}{2} (2t)^2 + t^2 \varepsilon(t) \right] - 1 = t^2 + t^2 \varepsilon(t). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{x(t) - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + t \varepsilon(t)}{1 + \varepsilon(t)} = 0,$$

ce qui indique que la tangente en A n'est autre que l'axe (Ox). Comme $y(t)$ change de signe au voisinage de $t = 0$, la courbe traverse la tangente. Comme $x(t) - 1$ garde un signe constant (positif) au voisinage de $t = 0$, la courbe reste du même côté de la tangente. On reconnaît un point de rebroussement de première espèce.

A.7. (1 point) Tracer la courbe Γ .

Cela devient encore plus facile si on s'aide de la partie B !

Partie B. Interprétation de Γ . On conseille de faire un dessin. Dans le plan orienté, d'origine O , on considère le cercle trigonométrique :

$$\mathcal{C} := \{ z; |z| = \sqrt{z\bar{z}} = 1 \}, \quad z = x + iy = e^{it}, \quad t \in [-\pi, \pi[.$$

On note A le point d'affixe $z = 1$, ou de coordonnées $(x, y) = (1, 0)$. On appelle D_m la droite qui est tangente au point m au cercle $\mathcal{C}$. On note B le point d'intersection (lorsqu'il existe) de D_m et de l'axe (Ox) des abscisses. A tout point m de $\mathcal{C}$, on associe le point M qui est le symétrique de A par rapport à la droite D_m . Ainsi, le milieu I du segment $[A, M]$ est situé sur la droite D_m .

B.1. (1 point) Montrer que les angles orientés $\widehat{OAm}$ et $\widehat{BAM}$ ont respectivement pour mesure $(\pi - t)/2$ et t .

Soit $\tilde{A}$ le point d'affixe $z = -1$. L'angle $\widehat{O\tilde{A}m}$ vaut $t/2$. Le triangle $\tilde{A}Am$ est rectangle en m . L'angle α de $\widehat{OAm}$ doit vérifier $\alpha + (t/2) + (\pi/2) = \pi$, ce qui fournit α .

Le triangle OmB est rectangle en m de sorte que l'angle $\widehat{OBm}$ vaut $(\pi/2) - t$. Enfin, le triangle BIA est rectangle en I , ce qui donne accès à la valeur $(\pi/2) - ((\pi/2) - t) = t$ de l'angle $\widehat{BAM}$. On peut aussi remarquer que les deux droites (Om) et (AM) étant toutes les deux perpendiculaires à la droite (Bm) , elles sont parallèles, et font donc le même angle t avec l'axe (Ox) .

B.2. (1 point) Montrer que l'angle orienté $\widehat{AmM}$ vaut t .

L'angle $\widehat{mAM}$ vaut $\pi - ((\pi/2) - (t/2)) - t = \pi/2 - (t/2)$. Le triangle AmM est isocèle de sommet m . Ainsi, l'angle $\widehat{AmM}$ vaut $\pi - 2((\pi/2) - (t/2)) = t$.

B.3. (1 point) Montrer que l'ensemble des points M obtenus lorsque m parcourt $\mathcal{C}$ n'est autre que Γ .

On passe de A à M par une rotation d'angle t et de centre m . Notant $\gamma(t)$ l'affixe du point M , cela s'écrit : qui s'écrit en terme d'affixes :

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= e^{it} + e^{it}(1 - e^{it}) = \cos t + i \sin t + (\cos t + i \sin t)(1 - \cos t - i \sin t) \\ &= x(t) + i y(t) = 2 \cos t - \cos^2 t + \sin^2 t + i [2 \sin t - 2 \sin t \cos t] \\ &= 2 \cos t - \cos(2t) + i [2 \sin t - \sin(2t)]. \end{aligned}$$