UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions de la variable réelle

Premier contrôle continu (durée 30 mn)

Nom : **Prénom :**

QCM : Répondre aux questions *en entourant les bonnes réponses.*

Barème :

- 2 points par réponse correcte entourée ;
- - 1 point pour une mauvaise réponse entourée ;
- 0 point en l'absence de réponse.

1) On considère l'ensemble A suivant :

$$A = \{ 1 + (-1)^n + (-1/2)^{n+1} \,;\; n \in \mathbb{N}^* \}.$$

A. L'ensemble A est majoré.

OUI, par exemple par 3 *puisque* $u_n = 1 + (-1)^n + (-1/2)^{n+1} \leq 1 + 1 + 1 = 3$.

B. $\sup A = 2$.

OUI. D'une part, on a :

$u_{2n} = 1 + 1 - (1/2)^{2n+1} < 2$ *avec* u_{2n} *qui tend vers* 2 *pour* $n \to +\infty$.

D'autre part, on a :

$u_{2n+1} = 1 - 1 + (1/2)^{2n+2} \leq 1/4$ *avec* u_{2n+1} *qui tend vers* 0 *pour* $n \to +\infty$.

C. L'ensemble A possède un plus grand élément.

NON, car 2 *n'est pas atteint comme démontré ci-dessus.*

D. $\inf (A \cap \mathbb{R}_+) = 0$.

OUI, comme démontré ci-dessus.

2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

A. Si I est majoré alors il admet un plus grand élément.

NON, considérer l'intervalle $[0, 1[$.

B. Si I contient -2 et 1 alors $[0, 1] \subset I$.

OUI.

C. Si I contient un rationnel et un irrationnel alors il contient un nombre décimal.

OUI. Soit a et b ces deux nombres qui sont nécessairement distincts. Soit c un élément de $]a,b[$. Le réel c admet une approximation $(u_n)_n$ par des nombres décimaux. Pour n assez grand, on a $u_n \in]a,b[$.

3) On note E la fonction partie entière. Les propriétés suivantes sont vérifiées.

A. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $E(n\,x) = n\,E(x)$.

NON, prendre $n = 2$ et $x = 0,5$.

B. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a $E(x+y) = E(x) + E(y)$.

NON, prendre $x = y = 0,5$.

C. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$E(-x) = \begin{cases} -E(x) - 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\,; \\ -E(x) & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

OUI. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a $E(x) = k \in \mathbb{N}$ avec $k < x < k+1$ de sorte que :

$E(-x) = -k - 1 = -E(x) - 1.$

4) Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

A. L'ensemble A admet un plus grand élément que l'on appelle la borne supérieure de A.

NON, pas forcément. Voir le cours.

B. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A; \sup B)$.

OUI. Soit $M = \max(\sup A; \sup B)$. Alors M est un majorant de A et de B, donc de $A \cup B$ ce qui donne $M \le \sup(A \cup B)$. Si $\sup B \le M = \sup A$, M est un majorant de B et est le plus petit des majorants de A. Il est donc le plus petit des majorants de $A \cup B$ et $M = \sup(A \cup B)$. Pareil pour le cas restant.

C. L'ensemble A admet une borne supérieure a qui est caractérisée par les deux propriétés :

$$\begin{array}{ll} (a) & \forall\, x \in A\,,\ x \le a\,; \\ (b) & \exists\, \varepsilon > 0\,,\ \forall\, x \in A\,;\ x \ge a - \varepsilon\,. \end{array}$$

NON. Dans (b), c'est $\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, x \in A$.

5) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites à valeurs dans l'intervalle $[1, +\infty[$. On suppose que ces deux suites vérifient :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n\, v_n \;=\; 4\,.$$

A. Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ admettent des sous-suites convergentes.

OUI. Remarquer d'abord qu'elles sont bornées. En effet, pour n assez grand, on récupère $3 \le u_n\, v_n \le 5$ ce qui implique $u_n \le 5$ et $v_n \le 5$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

B. Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers 2.

NON. Prendre $u_n = 1$ et $v_n = 4$.

C. La plus grande valeur d'adhérence possible pour $(u_n)_n$ est 4.

OUI. Soient l et $\tilde{l}$ des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ et de $(v_n)_n$. Par passage à la limite, on a $l\,\tilde{l} = 4$ ainsi que $1 \leq l$ et $1 \leq \tilde{l}$ ce qui donne $l \leq 4$.

6) Soit $(u_n)_n$ une suite *divergente* de nombres réels.

A. Il se peut que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la suite $(u_{k\,n})_n$ converge.

OUI. Considérer par exemple la suite $(u_n)_n$ avec $u_n = n$ si n est premier et $u_n = 0$ sinon.

B. On peut extraire une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_n$ telle que $(|u_{\sigma(n)}|)_n$ tende vers $+\infty$.

NON. Considérer par exemple la suite $(u_n)_n = (-1)^n$.

7) Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy.

A. Si $u_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)_n$ converge dans $\mathbb{Z}$.

OUI car la suite devient stationnaire à partir d'un certain rang.

B. Si $u_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)_n$ converge dans $\mathbb{Q}$.

NON, elle peut par exemple converger vers $\sqrt{2}$.

8) Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels.

A. La suite $(u_{3\,n})_n$ est extraite de $(u_{2\,n})_n$.

NON car 3^n n'est pas multiple de 2.

B. La suite $(u_{2\,n+1})_n$ est extraite de $(u_{2\,n})_n$.

NON, évident.

C. La suite $(u_{2\,n+8})_n$ est extraite de $(u_{2\,n})_n$.

OUI car $2\,n + 8 = 2\,(n + 4)$.

D. La suite $(u_{n^2})_n$ est extraite de $(u_{2\,n})_n$.

NON car n^2 avec $n \neq 2$ premier n'est pas multiple de 2.