UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

Corrigé du CC4 (durée 30mn)

Question de cours. On se place sur $\mathbb{R}^N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$.

Q1. Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On rappelle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\,, \qquad \langle \tilde{S}, \varphi \rangle \;=\; \langle S, \tilde{\varphi} \rangle\,, \qquad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)\,.$$

Etant donné $x \in \mathbb{R}^N$, donner la définition de $\tilde{S} * \varphi(x)$ puis de $T * S$:

$$\tilde{S} * \varphi(x) \;=\; \langle \tilde{S}, \varphi(x - \cdot) \rangle \;=\; \langle S, \varphi(x + \cdot) \rangle \qquad\qquad \langle T * S, \varphi \rangle \;=\; \langle T, \tilde{S} * \varphi \rangle\,.$$

Q2. On note $\hat{T}$ la transformation de Fourier de $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Etant donnés $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, rappeler la définition de :

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle \;=\; \langle T, \hat{\varphi} \rangle \qquad\qquad \mathcal{F}(\varphi)(\xi) \equiv \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\,x\cdot\xi}\; \varphi(x)\; dx\,.$$

Exercice I. Résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'équation différentielle $u' + u = \delta_0$.

Cela implique :

$$(e^x\, u)' \;= e^x\, \delta_0 = \delta_0\,.$$

ce qui donne dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *:*

$$\exists\, C \in \mathbb{R}\,; \qquad u(x) \;=\; e^{-x}\; H(x) + C\; e^{-x}\,.$$

Comme e^{-x} *n'est pas à croissance sous-polynômiale lorsque* $x \to -\infty$*, la condition supplémentaire* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *impose* $C = 0$.

Exercice II. Etant donnés $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\psi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, calculer :

$$\langle \delta'_a \otimes \delta'_b, \psi \rangle \;=\; \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y}(a, b) \qquad\qquad \langle \delta'_a * \delta'_b, \varphi \rangle \;=\; \varphi''(a + b)\,.$$

Exercice III. On rappelle que

$$\mathcal{F}(\delta_0) = 1\,, \qquad \mathcal{F}^{-1}T = \frac{1}{(2\,\pi)^N}\, \widetilde{\mathcal{F}T}\,.$$

Calculer la transformée de Fourier des distributions tempérées $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ qui sont associées aux fonctions suivantes :

III.1) $u(x) = \delta_0^{(k)}$ avec $k \in \mathbb{N}$.

$$\hat{u}(\xi) \;=\; (i\,\xi)^k\,.$$

Puisque $\delta_0^{(k)} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$*, on peut utiliser la formule :*

$$\widehat{\delta_0^{(k)}}(\xi) = \langle \delta_0^{(k)}, e^{-i\,\xi\,x} \rangle = \langle \delta_0, (-1)^k\, \partial_x^k (e^{-i\,\xi\,x}) \rangle = (i\,\xi)^k\, \langle \delta_0, e^{-i\,\xi\,x} \rangle = (i\,\xi)^k\,.$$

III.2) $u(x) = x^k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

$$\hat{u}(\xi) \;=\; 2\,\pi\; i^k\; \partial_x^k \delta_0\,.$$

De la question III.1), on a

$$\delta_0^{(k)} = \mathcal{F}^{-1}\big((i\,\xi)^k\big) = \frac{1}{2\,\pi}\;\widetilde{\mathcal{F}\big((i\,\xi)^k\big)}\,,$$

ce qui conduit à

$$\mathcal{F}(\xi^k) = 2\,\pi\;(-i)^k\;\widetilde{\delta_0^{(k)}} = 2\,\pi\;i^k\;\delta_0^{(k)}\,.$$

Exercice IV. Il existe une suite de polynômes qui converge vers δ_0 au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
Indication : A l'aide de l'exercice II, interpréter cette affirmation côté Fourier.

OUI - $\boxed{\text{NON}}$

Soit $(P_n)_n$ *une telle suite de polynômes. Alors :*

$$\hat{P}_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\; \partial_x^{(k)} \delta_0$$

doit converger vers 1 *au sens de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$*. Autrement dit :*

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})\,, \qquad \lim_{n\to+\infty}\; \langle \hat{P}_n, \varphi \rangle = \langle 1, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\; d\xi\,.$$

On obtient une contradiction en prenant une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *vérifiant*

$$supp\;\varphi \cap \{0\} = \emptyset\,, \qquad \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi)\; d\xi \neq 0\,.$$

Exercice V. Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On suppose que $T * \varphi \equiv 0$. Alors T est la distribution nulle ($T \equiv 0$) ou φ est la fonction nulle ($\varphi \equiv 0$).

$\boxed{\text{OUI}}$ - NON

Côté Fourier, on doit avoir $\hat{T}\;\hat{\varphi} \equiv 0$*. Il s'agit donc d'ajuster* T *et* φ *de façon à ce que*

$$T \not\equiv 0\,, \qquad \varphi \not\equiv 0\,, \qquad supp\,T \cap supp\,\varphi = \emptyset\,.$$

Mais comme T est à support compact, la fonction $\hat{T}$ est analytique. Soit elle vaut zéro, soit ses zéros sont isolés. Dans le premier cas, on a $T \equiv 0$. Dans le second cas, on a $\hat{\varphi} = 0$ sur un sous-ensemble dense (en dehors des zéros de $\hat{T}$), et donc $\hat{\varphi} \equiv 0$ puis $\varphi \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

L'hypothèse $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ joue un rôle essentiel. La conclusion est différente si on suppose seulement $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Par exemple, pour $T = 1$ et $\varphi = \mathcal{F}^{-1}\psi$ où ψ est n'importe quelle fonction dont le support est disjoint de $\{0\}$, on a $T * \varphi \equiv 0$ sans pour autant avoir $T \equiv 0$ ou $\varphi \equiv 0$.

Exercice VI. La distribution

$$T \,=\, i \sum_{n\in\mathbb{N}} e^n \; e^{i\,e^n} \;\, \delta_n(x) + \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{i\,e^x} \;\, \delta'_n(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

est tempérée.

$\boxed{\text{OUI}}$ - NON

Cela se voit difficilement par un calcul direct. Par contre, on peut observer que :

$$T \,=\, i \sum_{n\in\mathbb{N}} e^x \; e^{i\,e^x} \;\, \delta_n(x) + \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{i\,e^x} \;\, \delta'_n(x)$$

puis que $T = \partial_x S$ avec :

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{i\,e^x} \;\, \delta_n(x)\,.$$

Comme $\mathcal{S}'$ est stable sous l'action des dérivations, il suffit d'établir que $S \in \mathcal{S}'$. Cela résulte de l'inégalité

$$|\langle S,\varphi\rangle| \leq |\varphi(0)| + \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}\Big) \; \sup_{x\in\mathbb{R}} \; x^2 \, |\varphi(x)| \leq C \; \mathcal{N}_2(\varphi)$$

qui fait apparaître à droite un controle par une semi-norme de φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.