UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

Corrigé du CC3 (durée 30mn)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Dans le cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse (ou de barrer la mauvaise réponse). Si c'est* OUI, *donner une preuve. Si c'est* NON, *fournir un contre-exemple.*

Question de cours. Soit Ω un cône ouvert de $\mathbb{R}^N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$. On fixe $\beta \in \mathbb{R}$. Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on note M_λ l'homothétie de $\mathbb{R}^N$ de rapport λ. Donner la définition de ce qu'est une distribution homogène de degré β.

$$T \circ M_\lambda = \lambda^\beta \, T \, .$$

Exercice I. Il n'existe pas de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et de fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant à la fois $\operatorname{supp} T = \{0\}$ et $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ mais $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$.

NON

Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ *vérifiant* $\chi \equiv 1$ *sur un voisinage de* 0. *On prend* $\varphi(x) = x^2 \, \chi(x)$ *et* $T = \delta_0''$. *On a alors* $\operatorname{supp} T = \{0\}$ *et* $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ *mais :*

$$\langle \delta_0'', x^2 \, \chi(x) \rangle = \langle \delta_0, \left(x^2 \, \chi(x)\right)'' \rangle = \langle \delta_0, 2\, \chi + 4\, x\, \chi' + x^2 \, \chi'' \rangle = 2 \, .$$

Exercice II. Déterminer la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la suite de distributions suivantes :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \; n^2 \, (\delta_{1/n} + \delta_{-1/n} - 2\, \delta_0) \; = \; \delta_0'' \, .$$

Exercice III. La fonction qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ associe $f(x,y) := (x + i\, y)^{-1}$ s'étend en une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^2$.

OUI

Etant donné $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ *avec* $\operatorname{supp} \varphi \subset B(0, R]$, *on pose :*

$$\langle T, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{S}^1} e^{-i\,\theta} \; \varphi(r \, e^{i\,\theta}) \; dr \, d\theta \, , \qquad |\langle T, \varphi \rangle| \leq 4\, \pi \;\, R \;\; \| \, \varphi \, \|_\infty \; .$$

Ainsi T *est une distribution d'ordre* 0 *qui (après passage en coordonnées polaires) coincide avec* f *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Exercice IV. Soit $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction d'Heaviside qui vaut 0 pour $x < 0$ et 1 pour $x > 0$. Calculer au sens des distributions ce que vaut :

On utilise la formule de Leibniz :

$$\left\{\frac{d}{dx} - \lambda\right\} \left(H(x)\ e^{\lambda x}\right) = e^{\lambda x}\ H'(x) + \lambda\ e^{\lambda x}\ H(x) - \lambda\ e^{\lambda x}\ H(x) = e^{\lambda x}\ \delta_0 = \delta_0\,.$$

Exercice V. Etant donné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle T, \varphi \rangle \ = \ \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\ \varphi(\sin{(x\,y)})\ dx\,dy\,.$$

Donner sans justification ce que vaut le support de T.

$$\operatorname{supp} T \ = [-1, 1]\,.$$

Exercice VI. On travaille dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit δ la masse de Dirac en 0 et H la fonction d'Heaviside (qui vaut 0 pour $x < 0$ et 1 pour $0 \leq x$).

VI.1. Calculer les produits de convolution suivants :

$$\delta' * 1 \ = (\delta * 1)' = 1' = 0\,.$$

$$\delta' * H \ = (\delta * H)' = H' = \delta\,.$$

VI.2. A-t'on la propriété d'associativité : $(1 * \delta') * H = 1 * (\delta' * H)$?

NON

En utilisant la question VI.1, on obtient :

$$(1 * \delta') * H = 0 * H = 0\,, \qquad 1 * (\delta' * H) = 1 * \delta = 1\,.$$