Université Rennes I Année 2008-2009

L3 **TOPM**

Examen de seconde session - corrigé

Le 23/06/2009 - Durée: 2h

Question de cours. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Rappeler la définition de ce qu'est un *ouvert* et un *fermé*.

On appelle un ouvert de E, tout ensemble $U \subset E$ tel que pour tout $x \in U$, il existe une boule ouverte de centre x qui est incluse dans U. Ou encore : un ouvert $U \subset E$ est une réunion dénombrable de boules ouvertes.

On appelle un fermé de E, tout ensemble $F \subset E$ dont le complémentaire est un ouvert.

Exercice 1 On se place dans $\mathbb{R}$. Etant donné $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$d_1(x,y) := |x^2 - y^2|\,, \qquad d_2(x,y) := \min\big(1; |x-y|\big) \equiv \varphi(|x-y|)\,, \qquad \varphi(u) := \min\,(1; u)\,.$$

1.1. La fonction d_1 est-elle une distance (justifier la réponse) ?

d_1 n'est pas une distance car $d_1(-1,1) = 0$ avec $-1 \neq 1$.

1.2. Etablir l'inégalité :

$$\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u) + \varphi(v)\,, \qquad \forall\,(u,v) \in (\mathbb{R}_+)^2\,.$$

On raisonne au cas par cas.

- $1 \leqslant u \quad \Longrightarrow \quad \varphi(u+v) = 1 \leqslant 1 + \varphi(v) = \varphi(u) + \varphi(v)\,;$
- $1 \leqslant v \quad \Longrightarrow \quad \varphi(u+v) = 1 \leqslant \varphi(u) + 1 = \varphi(u) + \varphi(v)\,;$
- *$u < 1$ et $v < 1$. Comme $\varphi(w) \leqslant w$ pour tout $w \in \mathbb{R}_+$, on récupère : $\varphi(u+v) \leqslant u+v = \varphi(u)+\varphi(v)\,.$*

1.3. La fonction d_2 est-elle une distance (justifier la réponse) ?

d_2 est une distance. En effet :

- $d_2(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y\,.$
- $d_2(x,y) = d_2(y,x)\,.$
- *On a $d_2(x,y) = \varphi(|x-y|)$ avec $\varphi(u) = \min\,(1,u)$. La fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante et vérifie $\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u) + \varphi(v)$ d'après ce qui précède. Par conséquent :*
  $d_2(x,z) = \varphi(|x-z|) \leqslant \varphi(|x-y| + |y-z|) \leqslant \varphi(|x-y|) + \varphi(|y-z|) = d_2(x,y) + d_2(y,z)$
  ce qui donne l'inégalité triangulaire.

Exercice 2 On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme Euclidienne.

2.1. Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On considère les ensembles :

$A_1 := \big\{ \big(\cos\big(\frac{2\,\Pi\, n}{p}\big), \sin\big(\frac{2\,\Pi\, n}{p}\big) \big) \,;\, n \in \mathbb{N}^* \big\}, \qquad A_2 := \big\{ (x,0) \,;\, x \in \mathbb{R} \big\}, \qquad A_3 := \big\{ (x,y) \,;\, y < x^2 \big\}\,.$

Déterminer parmi les ensembles A_1, A_2 et A_3 ceux qui sont ouverts (justifier les réponses).

- *A_1 est une union finie de points (d'au moins deux points). C'est donc un ensemble fermé (qui n'est pas ouvert).*
- *L'application $\psi : (x,y) \longmapsto y$ est continue. L'ensemble $A_2 \equiv \psi^{-1}(0)$ est fermé en tant qu'image réciproque par ψ du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ (ou faire une preuve directe).*
- *La limite de la suite de points $\big\{(0, -\frac{1}{n})\big\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in A_3^{\mathbb{N}^*}$ est $(0,0) \in \bar{A}_3 \cap A_3^c$. Ainsi $A_3 \not\equiv \bar{A}_3$ ce qui implique que A_3 n'est pas fermé.*

2.2. On considère les ensembles :

$$A_4 \,:=\, \big\{\, (x,y) \,;\, e^x\, y \geqslant 1 \,\big\}\,, \qquad A_5 \,:=\, \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \big\{\, (x,y) \,;\, x^2+y^2 \leqslant 1 - \frac{1}{n} \,\big\}\,.$$

Déterminer parmi les ensembles A_4 et A_5 ceux qui sont fermés (justifier les réponses).

- *L'application $\chi : (x,y) \longmapsto e^x\, y$ est continue. L'ensemble $A_4 \equiv \chi^{-1}([1,+\infty[)$ est fermé en tant qu'image réciproque par χ du fermé $[1,+\infty[$ de $\mathbb{R}$ (ou faire une preuve directe).*
- *L'ensemble A_5 est la boule ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Ce n'est donc pas un fermé.*

2.3. Déterminer parmi les ensembles A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 ceux qui sont connexes (on ne demande pas de justifier les réponses).

A_2, A_3, A_4 et A_5 sont connexes.

Exercice 3 On se place sur $\mathbb{R}^n$ muni de la norme Euclidienne. On considère une *bijection continue* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\lim_{\|x\|\longrightarrow+\infty} \parallel f(x) \parallel = +\infty$. Autrement dit :

$$\forall\, M \in \mathbb{R}_+^*\,, \qquad \exists\, R \in \mathbb{R}_+^*\,; \qquad R \leqslant \parallel x \parallel \quad \Longrightarrow \quad M \leqslant \parallel f(x) \parallel \;.$$

3.1. Le choix de la norme Euclidienne (plutôt qu'une autre norme sur $\mathbb{R}^n$) a-t'il une influence sur la continuité de la fonction f ?

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (théorème de Riesz). Par conséquent, la notion de convergence d'une suite (et donc celle de continuité) ne dépend pas du choix de la norme.

3.2. Soit $(y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. On note $x_j := f^{-1}(y_j)$ l'image réciproque par f de y_j. Montrer que la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ est bornée.

Comme la suite $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée. On pose :

$$M \,:=\, \sup_{j\in\mathbb{N}} \;\parallel y_j \parallel < \,\infty\,.$$

Comme par hypothèse, la fonction f tend vers $+\infty$ pour $\| x \| \to +\infty$, on a :

$\exists\, R \in \mathbb{R}_+ ; \qquad \| x \| \geqslant R \quad \Longrightarrow \quad \| f(x) \| \geqslant M+1\,.$

Puisque par définition de M, on a $\| f(x_j) \| = \| y_j \| \leqslant M$, on récupère forcément

$\| x_j \| \leqslant R\,, \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}$

ce qui signifie que la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ est bornée (contenue dans $B(0,R]$).

3.3. Expliquer pourquoi il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante ajustée de façon à ce que la suite $(x_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ est convergente vers $x \in \mathbb{R}^n$.

On a par construction $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in B(0,R]^{\mathbb{N}}$. La boule $B(0,R]$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ puisque c'est un ensemble fermé et borné. Par conséquent, toute suite de points dans $B(0,R]$ admet une sous-suite convergente. Cela répond à la question.

3.4. Traduire en terme de sous-suites extraites l'affirmation suivante : *"La suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ne converge pas vers x dans $\mathbb{R}^n$."*

Dire que la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers x signifie :

$\exists\, \varepsilon \in]0,R[\,; \quad \forall\, N \in \mathbb{N}\,, \quad \exists\, j \geqslant N\,; \quad \| x_j - x \| \geqslant \varepsilon\,.$

Ou encore : Il existe une application $\tilde{\varphi} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante ajustée de façon à ce que la suite $(x_{\tilde{\varphi}(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ soit dans $K^{\mathbb{N}}$ avec $K := B(x,R] \setminus B(x,\varepsilon[$. Comme K est compact, quitte à extraire une seconde sous-suite, on peut toujours supposer que la suite $(x_{\tilde{\varphi}(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{x} \in K$ (ainsi $\tilde{x} \neq x$).

3.5. Déduire de ce qui précède que la fonction f est un homéomorphisme.

La fonction f étant par hypothèse une bijection continue, elle est un homéomorphisme ssi f^{-1} est continue. Il suffit donc de montrer que la suite $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est convergente. On raisonne par l'absurde. On suppose que tel n'est pas le cas. D'après ce qui précède (et puisque f est continue), on a :

$$\lim_{j\to+\infty} f\big(x_{\varphi(j)}\big) \,=\, f(x) \,=\, \lim_{j\to+\infty} y_{\varphi(j)} \,=\, y\,, \qquad \lim_{j\to+\infty} f\big(x_{\tilde{\varphi}(j)}\big) \,=\, f(\tilde{x}) \,=\, \lim_{j\to+\infty} y_{\tilde{\varphi}(j)} \,=\, y\,.$$

La fonction f ne peut pas être une bijection puisque les deux points distincts x et $\tilde{x}$ ont pour image par f le même point y. C'est la contradiction recherchée.

Exercice 4 Soit $E \equiv \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n (avec $n \geqslant 1$) et à coefficients réels. Ainsi

$$E \,:=\, \Big\{ P(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, X^j\,;\ a_j \in \mathbb{R}\,,\ j \in \{0,\cdots,n\} \Big\}\,.$$

On munit E d'une norme notée $\| \ \|$.

4.1. Quelle est la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E ?

C'est $n+1$ *car les monômes* X^j *avec* $j \in \{0, \cdots, n\}$ *forment une base de* E.

4.2. Expliquer pourquoi l'application

$$\begin{array}{rccc} L: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(0) \end{array}$$

est une application linéaire continue (on dit aussi une *forme linéaire continue*).

Toute application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie est continue (cours). Ou faire une preuve directe.

4.3. Rappeler la définition de ce qu'est la *norme* d'une application linéaire continue. On note $K \equiv \| L \| \in \mathbb{R}_+^*$ la norme de l'application linéaire continue L. Expliquer pourquoi $K \in \mathbb{R}_+^*$.

Par définition (et puisqu'en dimension finie le sup sur une boule fermée est atteint), on a :

$$K \equiv \| L \| := \sup_{\|P\| \leqslant 1} |L(P)| = \sup_{\|P\|=1} |P(0)| = |\tilde{P}(0)| \quad \textit{avec} \quad \| \tilde{P} \| = 1\,.$$

La contrainte $K = 0$ *implique (par un argument d'homogénéité) que* $L(P) = 0$ *pour tout* P *ce qui n'est pas possible puisque* $L(\mathbb{I}) = 1$ *(avec comme ci-dessous* $\mathbb{I}(X) = 1$*).*

4.4. Dans E, on distingue l'ensemble suivant $\mathcal{A} := \big\{ P \in E\,;\ P(0) = 1 \big\}$. Etablir l'identité

$$K^{-1} = \inf_{P \in \mathcal{A}} \| P \| \ .$$

On s'appuie sur l'équivalence

$$P(0) \neq 0 \quad \textit{et} \quad \| P \| = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q := P(0)^{-1}\, P \in \mathcal{A} \quad \textit{et} \quad \| Q \| = |P(0)^{-1}|\,.$$

Dès lors :

$$K^{-1} = \inf \big\{ |P(0)^{-1}|\,;\ \| P \| = 1\,,\ 0 < |P(0)| \big\} = \inf_{Q \in \mathcal{A}} \| Q \| \ .$$

4.5. Dans E, on distingue le sous-espace vectoriel F formé des polynômes P tels que $P(0) = 0$. Etablir l'identité

$$K^{-1} = d(\mathbb{I}, F) \equiv \inf_{P \in F} \| P - \mathbb{I} \|$$

où la lettre $\mathbb{I}$ désigne le polynôme constant égal à 1 ($a_0 = 1$ et les autres a_j sont nuls).

On s'appuie sur l'équivalence

$$Q \in \mathcal{A} \quad \Longleftrightarrow \quad Q(0) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a_0 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad Q(X) = \mathbb{I} - P \quad \textit{avec} \quad P \in F\,.$$

Dès lors :

$$K^{-1} = \inf_{(\mathbb{I}-P) \in \mathcal{A}} \| \mathbb{I} - P \| = \inf_{P \in F} \| \mathbb{I} - P \| = d(\mathbb{I}, F)\,.$$

4.5. Application. On prend $n = 1$ et on effectue le choix suivant de norme sur $E \equiv \mathbb{R}_1[X]$:

$$\| P \| := \Big(\int_0^1 |P(t)|^2\, dt \Big)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Calculer dans ce contexte ce que vaut la constante K.

Un élément $P \in \mathbb{R}_1[X]$ *s'écrit* $P(X) = a + b\,X$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*. On a* $P \in \mathcal{A}$ *ssi* $a = 1$*. D'après la question 4.4, on a*

$$K^{-1} \;=\; \inf_{b\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (1+b\,t)^2\;dt\right)^{1/2} \;=\; \inf_{b\in\mathbb{R}} \left(1+b+\frac{b^2}{3}\right)^{1/2} \;=\; \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad K = 2\,.$$