LICENCE MIPE
B02 - Suites et Séries Numériques -

Examen Terminal 14 avril 2008 - Semestres S2 et S4

Corrigé

Exercice 1. Question de cours. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. **Rappeler la définition de** *la suite est majorée*
2. **Rappeler la définition** *la suite est convergente*
3. **A partir de ces deux définitions, donner une démonstration de la proposition suivante :** *Si la suite est convergente, elle est majorée.*

1. Dire qu'une suite (u_n) est majorée signifie qu'il existe un réel M tel que pour tout entier n, on a $u_n \leq M$, ou encore

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$$

2. Dire qu'une suite (u_n) est convergente signifie qu'il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

3. Supposons que (u_n) converge et soit ℓ sa limite. Choisissons $\varepsilon = 1$ dans la définition 2. On peut trouver un entier N tel que pour tout entier $n \geq N$, on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$, d'où $u_n < \ell + \varepsilon = \ell + 1$. Soit $M = \sup\{u_0, \ldots, u_N, \ell + 1\}$. On a alors $u_n \leq M$ pour tout entier n. Donc (u_n) est majorée.

Exercice 2.
On pose $u_0 = u_1 = 0$ et $u_n = (\ln n)^{\frac{1}{n}}$ pour tout entier n tel que $n > 1$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

En passant par la forme exponentielle, on obtient $u_n = \exp[\frac{1}{n}\ln(\ln n)]$. On a $\lim_n \ln n = +\infty$, donc $\lim_n \ln(\ln n) = +\infty$ et comme $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, on obtient une forme indéterminée $0 \times \infty$.
Pour lever l'indétermination, on peut remarquer que $\ln(\ln n)$ tend vers $+\infty$ moins vite que n ; pour cela, on peut utiliser la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, puis écrire $\frac{1}{n}\ln(\ln n) = \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\frac{\ln n}{n}$; on a alors $\lim_n \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = 0$ et $\lim_n \frac{\ln n}{n} = 0$, donc $\lim_n \frac{1}{n}\ln(\ln n) = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \exp x = 1$, on obtient $\lim_n u_n = 1$.

Exercice 3. Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \textbf{pour tout } n \textbf{ appartenant à } \mathbb{N} \end{cases}$$

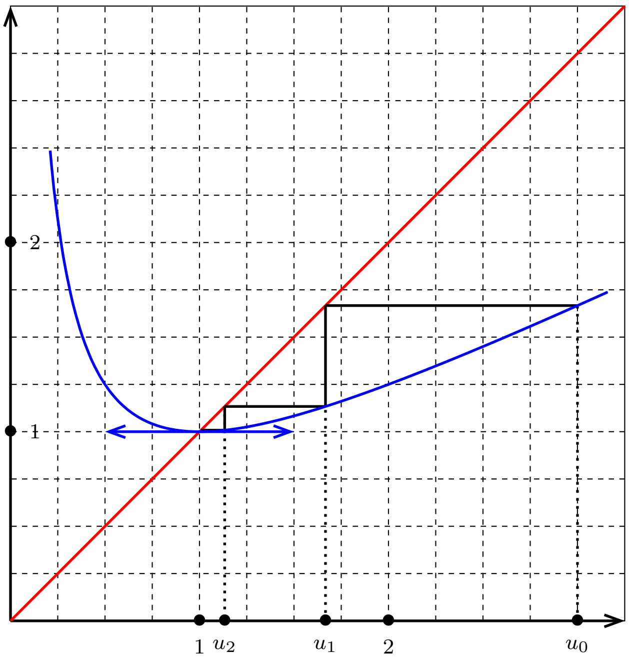
1. **Etudier les variations de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.**
2. **Déterminer les points fixes de f sur $]0, +\infty[$.**
3. **Sur le schéma gradué, dessiner le graphe de la fonction f, sa tangente au point d'abscisse $x = 1$ et les premières marches de l'escalier permettant de visualiser les premiers termes de la suite.**
4. **Démontrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a : $u_n \geq 1$.**
5. **Montrer que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante.**
6. **La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est-elle convergente et si oui, quelle est sa limite ?**

1. La fonction f est dérivable et on a pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{x^2})$; d'où $f'(x) > 0$ pour $x > 1$ et $f'(x) < 0$ pour $0 < x < 1$. La fonction f est donc décroissante sur $]0, 1[$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Un point fixe de f est un réel x du domaine de définition de f tel que $f(x) = x$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) = x$. Cette équation est équivalente à $\frac{1}{x} = x$, c'est-à-dire $x^2 = 1$; comme $x > 0$, la seule solution est $x = 1$. La fonction f a donc un seul point fixe qui est égal à 1.

3. La tangente en 1 est horizontale. Pour x petit, la fonction se comporte à peu près comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ et pour x grand, comme $x \mapsto \frac{1}{2x}$.



4. On sait que $f(1) = 1$ et que f est croissante sur $I = [1, +\infty[$, donc pour tout $x \geq 1$, on $f(x) \geq 1$. L'intervalle I est conservé par f. On sait qu'alors, si $u_0 \in I$, la suite reste dans I. C'est le cas puisque $u_0 = 3$, donc $u_n \geq 1$ pour tout n.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n}) - u_n = \frac{1}{2}(-u_n + \frac{1}{u_n}) = \frac{1}{2}(\frac{1-u_n^2}{u_n})$; comme $u_n \geq 1$, on obtient $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite est donc décroissante.
Autre méthode. On a $u_1 = \frac{1}{2}(3 + \frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$, donc $u_1 \leq u_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_{n+1} \leq u_n$. Comme $1 \leq u_{n+1}$ et comme f est croissante sur $[1, +\infty[$, on a $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$, donc $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Par récurrence sur n, on obtient $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n, c'est-à-dire que la suite est décroisante.

5. La suite est décroissante et minorée par 1. Elle est donc convergente (et sa limite est supérieure ou égale à 1). Sa limite est un point fixe de f, donc ne peut être que 1. On a $\lim\limits_n u_n = 1$.

Exercice 4.
Déterminer la nature convergente ou divergente de chacune des séries $\sum u_n$ dont le terme général u_n est donné pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

(a) $u_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ **(b)** $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ **(c)** $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n^2 - 31}\right)^n$

(d) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{1 + \sqrt{n}}$ **(e)** $u_n = (-1)^n \cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

(a) La suite a tous ses termes positifs et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Le terme de droite $v_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2}$; cette série est convergente puisque $\frac{3}{2} > 1$. Par comparaison, la série $\sum u_n$ est donc convergente.
(On peut aussi voir que $\lim\limits_n \frac{u_n}{v_n} = 1$ et utiliser le théorème de comparaison de deux suites à termes positifs équivalents).
(b) La suite a tous ses termes strictement positifs. On peut donc essayer d'utiliser la règle de d'Alembert. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}$. En mettant les termes prépondérants en facteur $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})}$. On en déduit que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge et que $\lim\limits_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4}$. Comme $0 \leq \frac{1}{4} < 1$, la série converge d'après la règle de d'Alembert.
(c) Les termes de la suite sont tous positifs à partir du rang $n = 6$. On peut donc essayer d'utiliser la règle de Cauchy. On a $(u_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{n+1}{n^2-31} = \frac{1}{n}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{31}{n^2}}\right)$. Donc la suite $((u_n)^{\frac{1}{n}})$ converge et sa limite est 0. Comme $0 < 1$, la règle de Cauchy montre que la série converge.
(d) La série est alternée. On a $|u_n| = \frac{1}{1+\sqrt{n}}$, donc la suite $(|u_n|)$ converge vers 0 ; d'autre part, la suite $(1+\sqrt{n})$ est positive et croissante, donc $\frac{1}{1+\sqrt{n}}$ est décroissante. Le critère des séries alternées montre que la série est convergente.
(e) Puisque $\lim\limits_n \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, on a $\lim\limits_n \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1$, d'où $\lim\limits_n |u_n| = 1$. La suite (u_n) ne converge pas vers 0, donc la série est grossièrement divergente.