LICENCE MIPE
B02 - Suites et Séries Numériques -

Examen Terminal - Semestres S2 et S4

14 avril 2008
Durée : 2 heures
Documents et calculettes sont interdits.
Les quatre exercices de l'épreuve sont indépendants.

Remplir l'en-tête de la copie double et coller l'étiquette indiquant votre code barre d'anonymat selon les instructions.

Reporter votre code barre d'anonymat en bas de cette page et au bas de chaque feuille du fascicule. (Seule cette information permet de vous identifier si le fascicule est séparé de la copie ou si les feuilles sont séparées.)

Vérifier que ce fascicule comporte bien les quatre exercices.

Composer chaque exercice sur le sujet, directement après l'énoncé. (Si vous n'avez pas assez de place, vous pouvez terminer sur la copie double.)
En fin d'épreuve, insérer le fascicule dans la copie double à en-tête.
Bon courage . . .

Cadre réservé aux correcteurs.

Exercice 1	points
Exercice 2	points
Exercice 3	points
Exercice 4	points
TOTAL	points

Code barre d'anonymat

T. S. V. P.

Exercice 1. Question de cours. On considère ici des suites réelles.

1. Rappeler la définition d'une suite majorée.
2. Rappeler la définition d'une suite convergente.
3. A partir de ces deux définitions, donner une démonstration de la proposition suivante :
   Toute suite convergente est majorée.

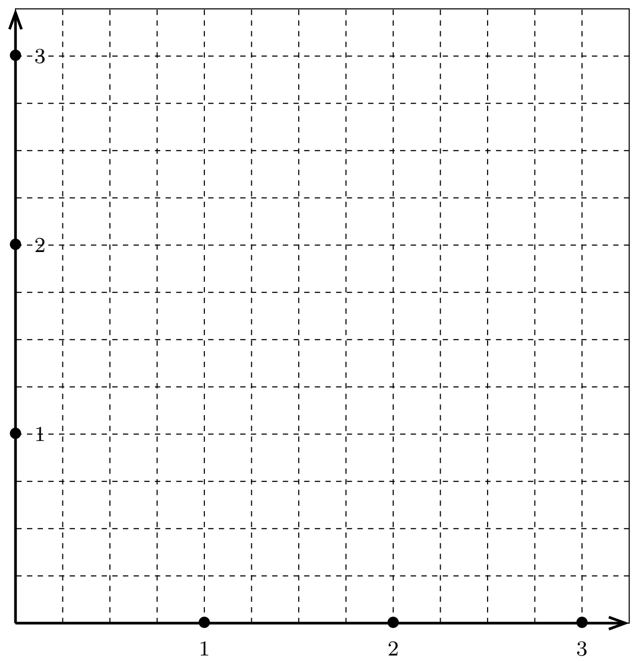
Exercice 2.
On pose $u_0 = u_1 = 0$ et $u_n = (\ln n)^{\frac{1}{n}}$ pour tout entier n tel que $n > 1$.
Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3. Soit f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \quad \text{pour tout } n \text{ appartenant à } \mathbb{N} \end{cases}$$

(Elle est bien définie, on ne demande pas de le démontrer).

1. Etudier les variations de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. Déterminer les points fixes de f sur $]0,+\infty[$.
3. Sur la figure de la page suivante, donner l'allure du graphe de la fonction f, dessiner sa tangente au point d'abscisse $x = 1$ et les deux premières marches de l'escalier permettant de visualiser les premiers termes de la suite.
4. Démontrer que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a : $u_n \geq 1$.
5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente et si oui, quelle est sa limite ?



Code barre d'anonymat

T. S. V. P.

Exercice 4.
Déterminer la nature convergente ou divergente de chacune des **séries** $\sum u_n$ dont le terme général u_n est donné pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

(a) $u_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ (b) $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ (c) $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n^2-31}\right)^n$

(d) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ (e) $u_n = (-1)^n \cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$