Université de Rennes 1
Licence MIPE - Mathématiques - L1 et L2
Année 2007/2008

Module BO2 - Suites et séries - Semestres S2 et S4
Contrôle continu 2 - Corrigé

Exercice 1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.
Démonstration

On veut montrer que pour tout $M > 0$, il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n v_n > M$.
Fixons $M > 0$, arbitrairement grand.
Par définition, dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ signifie que pour tout $M_1 > 0$, il existe un n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, on ait $u_n > M_1$; en considérant $M_1 = \sqrt{M}$, on voit qu'on peut choisir un n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, on ait $u_n > \sqrt{M}$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, donc on peut choisir un n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$, on ait $v_n > \sqrt{M}$.
Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n v_n > \sqrt{M} \times \sqrt{M} = M$, ce qui donne le résultat.

Erreurs et difficultés rencontrées. - Le texte n'est pas compris : on demandait une démonstration *à partir des définitions* et non simplement quelque chose du genre "on sait que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty \times +\infty = +\infty$".
- La définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ est trop souvent fantaisiste.
- Plus délicat : on obtient comme ci-dessus "pour $n \geq n_0$, $u_n v_n \geq M_0 M_1$" ; puis "on pose $M = M_0 M_1$, etc .." Mais ceci ne répond pas à la question : c'est M qui est arbitraire et pas M_0 et M_1 ; il faut donc choisir M_0 et M_1 en fonction de M et pas l'inverse.

Exercice 2. Pour chacune des suites ci-dessous, dire si elle converge ou non et démontrer votre affirmation.

1. **La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = (1 + \frac{(-1)^n}{2})^n$.**

   Pour tout n, on a $w_{2n} = (\frac{3}{2})^{2n} = (\frac{9}{4})^n$. Comme $\frac{9}{4} > 1$, la suite géométrique (w_{2n}) (de raison $\frac{9}{4}$) diverge. Si (w_n) convergeait vers une limite réelle ℓ, ce serait aussi le cas de la sous-suite (w_{2n}). Donc (w_n) ne converge pas.
   Erreurs et difficultés rencontrées. - On arrive à écrire : " $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n = 0$! car $|-1| \leq 1$"
   (autre version " $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n = +\infty$, car $|-1| \geq 1$").
   - On écrit : "pour n pair, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$" (au lieu de $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n} = +\infty$) et pour n impair, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$" (au lieu de $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n+1} = 0$) et on force la conclusion en disant "(w_n) ne converge pas, car elle a deux limites".
   - Plus subtil : "la suite $(1 + \frac{(-1)^n}{2})$ ne converge pas, donc $((1 + \frac{(-1)^n}{2})^n)$ ne converge pas" ; ceci revient à dire que si $((1 + \frac{(-1)^n}{2})^n)$ convergeait, $(1 + \frac{(-1)^n}{2})$ convergerait aussi ; mais si par exemple, $a_{2n} = -\frac{1}{2}$ et $a_{2n+1} = -\frac{1}{4}$, la suite $((1 + a_n)^n)$ converge mais la suite $(1 + a_n)$ ne converge pas.

2. **La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (3^n + 2^n)^{\frac{1}{n}}$.**

On a une forme indéterminée $(+\infty)^0$. En mettant en facteur le terme prépondérant 3^n dans la parenthèse, on obtient $v_n = 3[1 + (\frac{2}{3})^n]^{\frac{1}{n}}$, puis en passant à la forme exponentielle, $v_n = 3\exp\left[\frac{1}{n}\ln\left(1 + (\frac{2}{3})^n\right)\right]$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{2}{3})^n = 0$ (suite géométrique de raison $\frac{2}{3} \in [0, 1[$) et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1 + x) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + (\frac{2}{3})^n\right) = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1 + (\frac{2}{3})^n\right) = 0$; comme $\lim\limits_{x\to 0} \exp x = 1$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.

Erreurs et difficultés rencontrées. - " $\lim\limits_{n\to+\infty} [\frac{1}{n}\ln\left(1 + (\frac{2}{3})^n\right)] = 0$, parce que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + (\frac{2}{3})^n\right) = +\infty$ et n l'emporte sur ln" (variante : "parce que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = +\infty$") : attention ceci veut dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, d'où, quand $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{u_n} = 0$ et non pas $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{n} = 0$.

3. **La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n + \frac{1}{n}} - \sqrt{n - \frac{1}{n}}$.**

Ici, on a une forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$. En multipliant par la quantité conjuguée, on obtient $u_n = \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n-\frac{1}{n}}}$. Comme le numérateur $\frac{2}{n}$ converge vers 0 et le dénominateur $\sqrt{n + \frac{1}{n}} + \sqrt{n - \frac{1}{n}}$ tend vers $+\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Erreurs et difficultés rencontrées. On écrit " $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n + \frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}$ (*), d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n}) = 0$", i.e. on remplace $\sqrt{n - \frac{1}{n}}$ par $\sqrt{n}$, qui a la même limite, mais ne lui est pas égal.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie et dans ce cas, démontrer le résultat, ou fausse et dans ce cas donner un contre-exemple.

1. **Si la suite (u_n) converge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.**

Vraie : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$), on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell - \ell = 0$.

2. **Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$, la suite (u_n) converge.**

Fausse. Prendre par exemple la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n}$ pour tout entier n ; on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc la suite (u_n) ne converge pas. Cependant, $0 \leq u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.
Autre contre-exemple : $(u_n) = (\ln n)$.