Université Rennes I **Année 2007-2008**

Unité d'enseignement B02

Contrôle 1 - Durée : 30 minutes

Exercice 1. On se donne deux réels $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On considère l'ensemble $E = \{x, y\}$. Comme à l'usuel, on note "$\max(x, y)$" le majorant de E. Montrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

La formule est symétrique en x et y. Il suffit donc de traiter le cas $x \leq y$. On a alors $\max(x, y) = y$ *et par ailleurs :*

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + y - x}{2} = y.$$

Problème. Un étudiant loue une chambre pour trois ans. On lui propose deux types de contrats de location (un contrat de location s'appelle aussi un *bail*).

- *Contrat A :* Un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de cinq euros par mois jusqu'à la fin du bail.

- *Contrat B :* Un loyer de 200 euros pour le premier mois puis une augmentation de deux pour cent par mois jusqu'à la fin du bail.

On note u_n (resp. v_n) le montant (en euros) du loyer à payer dans le cadre du contrat A (resp. B) à l'issue du $\text{n}^{\text{ièm}}$ mois. On a ainsi $u_1 = 200$ et $v_1 = 200$.

On note U_n (resp. V_n) la somme totale (en euros) déboursée dans le cadre du contrat A (resp. B) à l'issue du $\text{n}^{\text{ièm}}$ mois. On a ainsi :

$$U_n = u_1 + \cdots + u_n, \qquad V_n = v_1 + \cdots + v_n.$$

1. Calculer pour chacun des deux contrats A et B le loyer à payer à l'issue du $2^{\text{ièm}}$ mois :

$$u_2 = 205 \qquad\qquad v_2 = 204.$$

2. Déterminer les deux réels $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ qui sont ajustés de façon à ce que $u_{n+1} = u_n + a$ et $v_{n+1} = b\, v_n$.

$$a = 5 \qquad\qquad b = 1,02.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

Par récurrence sur l'entier n, en utilisant le **2.**, on obtient :
$u_n = 200 + 5\,(n-1)$ $\qquad v_n = (1,02)^{(n-1)} \times 200\,.$

4. Identifier, lorsque n tend vers $+\infty$, la limite du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$.

D'après ce qui précède, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{1}{(1,02)^n} + \frac{5}{200} \times \frac{n}{(1,02)^n}\,.$$

La Proposition 4.2 du cours, cas (iii), donne :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{(1,02)^n} = 0\,.$$

La Proposition 4.5 du cours, cas (i) appliquée avec $p = 1$ et $q = 1,02$, conduit à :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n}{(1,02)^n} = 0\,.$$

Finalement :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = 0\,.$$

Autrement dit, pour n très grand, le loyer v_n devient beaucoup plus élevé que le loyer u_n !

5. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer U_n et V_n en fonction de n.*

$$\begin{aligned} U_n &= 200 + (200+5) + \cdots + [200 + 5\,(n-1)] \\ &= 200\,n + 5\ [1 + 2 + \cdots + (n-1)] \\ &= 200\,n + 5\ n\ (n-1)/2\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_n &= 200\ [1 + 1,02 + \cdots + (1,02)^{n-1}] \\ &= 200 \times \frac{1-(1,02)^n}{1-1,02} = 10^4\ [(1,02)^n - 1]\,. \end{aligned}$$

6. *Quel est le contrat qui s'avère le plus avantageux une fois les 36 mois écoulés (à justifier par le calcul) ?*

On trouve $U_{36} = 10\,350 > V_{36}$. C'est donc le contrat B qui est le plus avantageux sur la durée (3 ans) impliquée. Il faut attendre plus longtemps pour que le contrat A devienne le plus intéressant.