Université Rennes I Année 2008-2009
L3 **Topologie**

Correction du contrôle continu $N°1$

Exercice 1 Répondre par *OUI* ou par *NON* aux questions suivantes. Une réponse correcte donne un $+1$ et une réponse fausse un $-\frac{1}{2}$ (et 0 s'il n'y a pas de réponse). La note totale de l'exercice sera 0 au minimum.

Q1 : Il existe un espace métrique contenant 15 ouverts et 17 fermés.
NON. Un ensemble O est ouvert ssi son complémentaire est fermé. Ainsi il y a toujours autant d'ouverts que de fermés.

Q2 : Toute suite convergence dans un espace métrique est bornée.
OUI. $x_n \to x$ signifie que $d(x_n, x) \to 0$. Ainsi il existe N tel que $d(x_n, x) \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant N_0$. Si on pose

$$M =: \max_{0 \leqslant n < N_0} d(x_n, x)$$

et $R = max(M, 1)$ alors on aura

$$d(x_n, x) \leqslant R, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ce qui signifie que la suite x_n est inclus dans la boule $B(x, R]$ ce qui veut dire qu'elle est bornée.
Q3 : Tout singleton d'un espace métrique est fermé.
OUI. Soit $\{x\}$ un singleton. Si $y \in {}^C\{x\}$ alors $y \neq x$, donc $r = d(x, y) > 0$. La boule ouverte $B(y, r)$ est un voisinage de y qui est inclus dans ${}^C\{x\}$. Ceci implique que ${}^C\{x\}$ est un ouvert et donc $\{x\}$ est un fermé.
Q4 : Une application linéaire d'un espace normé E dans $\mathbb{R}$ est bornée si et seulement si elle est nulle.
OUI. Supposons que f est bornée. Soit x un élément quelconque de E. Par linéarité $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ et donc $\{\lambda f(x),\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ ce qui n'est possible que si $f(x) = 0$. Puisque x est quelconque alors $f \equiv 0$.

Q5 : Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique. La fermeture de toute boule ouverte $B(x, r[= \{y \in \mathbb{X}; d(x, y) < r\}$ et la boule fermée $B(x, r] = \{y \in \mathbb{X}; d(x, y) \leqslant r\}$.
NON. Prenons par exemple la topologies discrète sur un ensemble X de cardinal $\geqslant 2$. Pour tout $x \in X$ $B(x, 1) = \{x\}$ un fermé et donc sa fermeture est égale à elle même, par contre $B(x, 1] = X$.

Q6 : Deux distances équivalentes sur un espace $\mathbb{X}$ donnent lieu à la même famille de fermés.
OUI. Puisque ils ont les mêmes ouverts (car elles sont topologiquement équivalentes) alors elles ont donnent les mêmes fermés.

Exercice 2 Déterminer (sans justification) l'intérieur, la fermeture et la frontière des ensembles suivants.

1. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle :

$$A_0 = \mathbb{Z}, \quad A_1 = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{Z}^*\}.$$

$\mathbb{Z}$ est un fermé car par sa complémentaire est $\cup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$ union d'ouverts (donc ouvert). Ainsi

$$\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}.$$

Rappelons que si $A \subset \mathbb{R}$ alors $Int(A) = \{x \in A \text{ ils existent } > \alpha < \beta \text{ tels que } x \in]\alpha, \beta[\subset A\}$. Un ensemble qui peut pas contenir un intervalle ouvert non triviale de $\mathbb{R}$ (comme $\mathbb{Z}$) est forcément d'intérieur vide : $Int(\mathbb{Z}) = \emptyset$.
A_1 est un ensemble discret et il est clair qu'il ne peux pas contenir un intervalle ouvert non triviale de $\mathbb{R}$ et il est forcément d'intérieur vide.

L'ensemble A_1 n'est pas fermé car $x_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0 mais 0 n'appartient pas A_1. Ceci implique aussi que $A_1 \subset A_1 \cup \{0\} \subset \overline{A_1}$.
Puisque la fermeture d'un ensemble est le plus plus fermé qui le contient alors on aura prouvé que $\overline{A_1} = A_1 \cup \{0\}$ si on montre que ce dernier est un fermé. Ceci provient du fait que son complémentaire est l'union des ouvert $]-\infty, -1[$, $]1, +\infty[$, les $I_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n =]\frac{-1}{n}, \frac{-1}{n+1}[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance usuelle :

$$A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} : 0 < x^2 + y^2 < \pi\}, \quad A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) : x^2 + y^2 = \pi\}.$$

Rappelons que si $A \subset \mathbb{R}^2$ alors $Int(A) = \{x \in A :$ ils existent$\alpha < \beta$ et $\delta < \gamma$ tels que $x \in]\alpha, \beta[\times]\delta, \gamma[\subset A\}$.
Il est clair que ni A_3 ni A_4 peut contenir des pavés $]\alpha, \beta[\times]\delta, \gamma[$ car $\mathbb{Q}$ ne peut pas contenir un intervalle ouvert non triviale de $\mathbb{R}$. Ainsi A_3 et A_4 sont d'intérieurs vides.
En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ on peut montrer sans difficulté que

$$\overline{A_3} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leqslant \pi\}, \quad \overline{A_4} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = \pi\}.$$

Exercice 3 Soient $\mathbb{X} = [0, 1]$ et $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{si} \quad x - y \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{X}$.
   • Il est clair que $d \geqslant 0$.
   • $d(x, y) = 0$ si est seulement si $x - y \in \mathbb{Q}$ et $|x - y| = 0$ si est seulement si $x = y$.
   • $d(x, y) = d(y, x)$ car si $x - y \in \mathbb{Q}$ alors $y - x \in \mathbb{Q}$ et $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$ et si $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $y - x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $d(x, y) = 1 = d(y, x)$.
   • Si $x - z \in \mathbb{Q}$ et $z - y \in \mathbb{Q}$ alors $x - y \in \mathbb{Q}$ et $d(x, z) + d(z, y) = |x - z| + |y - z| \geqslant |x - y| = d(y, x)$.
   Dans tous les autres cas on a :

$$d(x, z) + d(z, y) \geqslant 1 \geqslant d(y, x).$$

2. Vérifier que que $\mathbb{X}$ est borné (pour la distance d) et déterminer son diamètre.
   • Pour tout $(x, y)\mathbb{X}^2$ on ait $d(x, y) \leqslant 1$, donc $\mathbb{X}$ est borné pour la distance d et son diamètre est $\leqslant 1$.
   • Puisque $d(0, 1) = 1$ alors le diamètre sera égale à 1 (rappelons que $D = \max_{x,y \in \mathbb{X}} d(x, y)$).
3. Déterminer le diamètre de l'intervalle $[\frac{1}{2009}, \frac{1}{2008}]$.
   Bien sur $D([\frac{1}{2009}, \frac{1}{2008}]) \leqslant D(\mathbb{X}) = 1$. De plus, si on prend un rationnel et un irrationnel de $[\frac{1}{2009}, \frac{1}{2008}]$ alors la distance entre eux est égale à 1. Ainsi $D([\frac{1}{2009}, \frac{1}{2008}]) = 1$
4. On pose $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ (les irrationnels de $[0, 1]$).
   (a) Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de A qui converge vers $x \in \mathbb{X}$. Montrer que x est irrationnel.
   Si x est rationnel alors $(x_n - x)$ est irrationnel pour tout n. Ainsi $d(x_n, x) = 1$ ce qui contredit le fait que $d(x_n, x) \to 0$.
   (b) En déduire que A est fermé.
   D'après la question précédente si $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de A qui converge vers $x \in \mathbb{X}$ alors $x \in A$. Ainsi A est fermé.
5. On pose $B = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ (les rationnels de $[0, 1]$).
   (a) Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de B qui converge vers un $x \in \mathbb{X}$. Montrer que x est rationnel.
   Si x est irrationnel alors $x_n - x$ est irrationnel pour tout n. Ainsi $d(x_n, x) = 1$ ce qui contredit le fait que $d(x_n, x) \to 0$.
   (b) En déduire que B est fermé.
   D'après la question précédente si $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de B qui converge vers $x \in \mathbb{X}$ alors $x \in B$. Ainsi B est fermé.
6. E déduire, de ce qui précède, que $(\mathbb{X}, d)$ n'est pas connexe.
   A et le complémentaire de B dans $\mathbb{X}$. Donc, A est un sous-ensemble de $\mathbb{X}$ différent de $\emptyset$ et de $\mathbb{X}$ qui est ouvert et fermé à la fois. Ainsi $\mathbb{X}$ n'est pas connexe.

7. Soit $f : (\mathbb{X}, d) \to (\mathbb{R}, |.|)$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in X \cap \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

Soit $(x, y) \in \mathbb{X}$. En distinguant le cas $x - y \in \mathbb{Q}$ et $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ on obtient trivialement

$$|f(x) - f(y)| \leqslant d(x, y).$$

La fonction f est lipschitzienne donc continue.