UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Topologie générale

Corrigé de l'examen du ??/12/2012

Exercice I

Les intervalles $]-\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$ et $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ engendrent sur $\mathbb{R}$ une topologie, notée $\mathcal{O}$, composée d'ouverts.

I.1. Expliquer pourquoi les intervalles $]a, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$ sont à la fois ouverts et fermés dans l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$.

• $]a, b] =]-\infty, b] \cap]a, +\infty[$ *est ouvert en tant qu'intersection de deux ouverts ;*

• $]a, b]$ *est fermé car son complémentaire* $]-\infty, a] \cup]b, +\infty[$ *est ouvert en tant qu'union de deux ouverts.*

I.2. Expliquer pourquoi les intervalles $]a, b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$ sont des ouverts dans l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$.

On a $]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[$. *Or* $]-\infty, b[$ *est ouvert puisque c'est une union d'ouverts :*

$$]-\infty, b[= \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*}]-\infty, b - \frac{1}{n}] \, .$$

I.3. On note $\mathcal{T}$ la topologie induite sur $\mathbb{R}$ par la valeur absolue. On munit l'ensemble $X := \{0, 1\}$ de la topologie discrète $\mathcal{T}_d$. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow X$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

i) $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ est continue ;

ii) $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ n'est pas continue ;

Soit $\chi_A : \mathbb{R} \longrightarrow X$ *la fonction caractéristique de l'ensemble* $A :=]-\infty, 0]$, *donnée par :*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad x \in A \, , \\ 0 & \textit{si} \quad x \notin A \, . \end{cases}$$

Cette fonction χ_A *fournit un exemple qui convient :*

- $\chi_A : (\mathbb{R}, \mathcal{O}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ *est continue. En effet, l'image réciproque par l'application* χ_A *d'une partie quelconque de* X, *c'est à dire d'un ouvert quelconque de* $(X, \mathcal{T}_d)$, *est de la forme* $\emptyset$, $]-\infty, 0]$, $]0, +\infty]$ *ou* $\mathbb{R}$ *qui sont tous des ouverts de* $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ *;*
- $\chi_A : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ *n'est pas continue. En effet,* $\chi_A^{-1}(1) =]-\infty, 0]$ *n'est pas un ouvert de* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

I.4. L'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ est-il connexe par arc ?

La réponse est **NON**. *Connexe par arc implique connexe. Or, l'espace topologique* $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ *n'est pas connexe ce qui peut se voir de différentes façons :*

- *la question* **I.1** *fournit l'existence de parties* $]a, b]$ *non vides et strictement incluses dans* $\mathbb{R}$, *qui sont à la fois ouvertes et fermées ;*
- *la question* **I.3** *fournit l'existence d'une fonction* $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ *qui est continue mais qui n'est pas non constante.*

I.5. Les espaces topologiques $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ et $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ sont-ils homéomorphes ?

La réponse est **NON**. *Deux preuves possibles.*

- *Par l'absurde. Supposons que les espaces topologiques* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ *et* $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ *sont homéomorphes. Comme* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ *est connexe (ou connexe par arc), cela implique que* $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ *est connexe (ou connexe par arc). Or ce n'est pas le cas (question* **I.4***).*
- *Une autre preuve consiste à se souvenir d'un exercice du CC2. On peut montrer que l'espace topologique* $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ *n'est pas métrisable tandis que* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ *l'est.*

Exercice II

On se place sur un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ de *dimension infinie*. Soit K une partie *compacte* de E. On note $S(x, r) := \{y; \| y - x \| = r\}$.

II.1. Répondre (sans justification) par **OUI** ou par **NON** aux affirmations suivantes :

i) $S(x, r)$ est d'intérieur vide ; **OUI**

Par l'absurde. Si $S(x, r)$ *n'est pas d'intérieur vide, il existe* $z \in S(x, r)$ *et* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *tels que* $B(z, \varepsilon[\subset S(x, r)$. *Alors :*

- $z + \varepsilon\, t\, \frac{z-x}{\|z-x\|} \in B(z, \varepsilon[\subset S(x, r), \quad \forall t \in [0, 1[,$
- $\| z + \varepsilon\, t\, \frac{z-x}{\|z-x\|} - x \| = |r + \varepsilon\, t| \neq r, \quad \forall t \in [0, 1[,$

ce qui est contradictoire.

ii) $S(x, r)$ est compacte ; **NON**

Par l'absurde. Soit $\Phi : [0, 1] \times S(x, r) \longrightarrow B(0, 1]$ *l'application qui à* (t, y) *fait correspondre le point* $\Phi(t, y) = r^{-1}\, t\, (y - x)$. *Supposons que* $S(x, r)$ *est compact. Alors le produit* $[0, 1] \times S(x, r)$ *est compact. Et, comme* Φ *est continue, son image par* Φ, *qui n'est autre que* $B(0, 1]$, *est compacte. C'est une contradiction avec l'hypothèse selon laquelle* E *est de dimension infinie (théorème de Riesz).*

iii) $S(x, r)$ est connexe par arc ; **OUI**

Soit $(y, z) \in S(x, r)$ *avec* $x \notin [y, z]$. *Les points* x, y *et* z *étant non alignés, il existe un unique plan qui les contient, dont l'intersection avec* $S(x, r)$ *est un cercle en dimension deux, dont on sait qu'il est connexe par arc. Si* $x \in [y, z]$, *il suffit de répéter l'argument en passant par un point intermédiaire quelconque* $w \in S(x, r)$ *avec* $w \neq y$ *et* $w \neq z$.

II.2. Etant donné $x \in (E \setminus K)$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on considère l'application $\Phi_x^r : K \longrightarrow S(x,r)$ qui à $k \in K$ associe $\Phi_x^r(k) := x + r \parallel k - x \parallel^{-1} (k-x)$. Prouver que Φ_x^r ne peut pas être surjective.

L'application Φ_x^r est clairement continue. Ainsi, l'image par Φ_x^r du compact K est un compact de $S(x,r)$, nécessairement distinct de $S(x,r)$ puisque $S(x,r)$ n'est pas compact (voir la question **II.1.***ii).*

II.3. Déduire de ce qui précède que l'ensemble $E \setminus K$ est connexe par arc (faire un dessin).

Soit $(x,\tilde{x}) \in (E \setminus K)^2$. L'ensemble K étant compact, il est borné. On peut donc trouver $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\tilde{r} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $(K \cup \{\tilde{x}\}) \subset B(x,r[$ et $B(x,r[\subset B(\tilde{x},\tilde{r}[$.

D'après la question **II.2***, il existe $y \in S(x,r)$ tel que $y \notin \Phi_x^r(K)$. Pour tout point du segment $[x,y]$, c'est à dire de la forme $x+t\,(y-x)$ avec $t \in]0,1]$, on a $\Phi_x^r(x+t\,(y-x)) = y$. Ainsi, la condition $y \notin \Phi_x(K)$ implique en particulier $[x,y] \cap K = \emptyset$.*

De même, il existe $\tilde{y} \in S(\tilde{x},\tilde{r})$ tel que $\tilde{y} \notin \Phi_{\tilde{x}}^{\tilde{r}}(K)$ et cela implique $[\tilde{x},\tilde{y}] \cap K = \emptyset$. Le segment $[\tilde{x},\tilde{y}]$ intersecte $S(x,r)$ en un point $\hat{y}$ et on conserve $[\tilde{x},\hat{y}] \cap K = \emptyset$.

D'après la question **II.1.***iii), on peut joindre y et $\hat{y}$ par un chemin γ tracé dans $S(x,r)$, c'est à dire à l'extérieur de K.*

Finalement, on peut aller continûment de x à $\tilde{x}$ en suivant $[x,y] \cup \gamma([0,1]) \cup [\hat{y},\tilde{x}]$.

Exercice III

On se place sur l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ formé des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni de la norme de la convergence uniforme :

$$\parallel f \parallel := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \,.$$

On fixe $(a,b) \in]-1,1[\times \mathbb{R}$ et $g \in E$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rcll} T : E & \longrightarrow & E & \\ f & \longmapsto & T(f) & \text{avec} \quad T(f)(x) := a\, f(bx)\,. \end{array}$$

III.1. Montrer que l'application $\Xi : E \longrightarrow E$ qui à $f \in E$ associe $\Xi(f) := g + T(f)$ est contractante (de rapport < 1).

Cela tient à ce que :

$$\parallel \Xi(f) - \Xi(\tilde{f}) \parallel = \parallel T(f-\tilde{f}) \parallel = |a| \sup_{x \in \mathbb{R}} |(f-\tilde{f})(bx)| = |a| \parallel f - \tilde{f} \parallel \,.$$

III.2. Etablir l'existence d'une unique fonction $f \in E$ telle que :

$$f(x) - a\, f(bx) = g(x)\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

L'espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ est de Banach. D'après le théorème du point fixe, l'application Ξ a un unique point fixe f qui vérifie la relation indiquée.

III.3. Vérifier que :

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \; g(b^n x)\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

et en déduire que l'application $Id - T$ est un homéomorphisme sur E.

On sait de plus que la suite des itérés $\{\Xi^n(g)\}_n$ tend vers f pour $\| \cdot \|$, c'est à dire uniformément, et donc en particulier simplement. Il suffit dès lors d'observer que :

$$\Xi^n(g)(x) = \sum_{j=0}^{n} T^j(g)(x) = \sum_{j=0}^{n} a^j \; g(b^j x)\,.$$

L'application $Id - T$ est linéaire continue sur E, bijective d'après **III.2***, et d'inverse continu puisque :*

$$\| \; f \; \| = \| \; (Id - T)^{-1} g \; \| \leq \; (\sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n) \; \| \; g \; \| \leq \; (1 - |a|)^{-1} \; \| \; g \; \| \;\; .$$

Exercice IV

Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques compacts. On note $\mathcal{C}(X \times Y; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $X \times Y$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{A}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}(X \times Y; \mathbb{R})$ regroupant les fonctions qui se mettent sous la forme :

$$f(x,y) \;=\; \sum_{i \in I} \lambda_i \; u_i(x)\, v_i(y)\,, \qquad u_i \in \mathcal{C}(X; \mathbb{R})\,, \quad v_i \in \mathcal{C}(Y; \mathbb{R})\,, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\,, \quad I \text{ fini.}$$

Etablir que tout $f \in \mathcal{C}(X \times Y; \mathbb{R})$ est limite uniforme d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

Clairement, l'ensemble $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X \times Y; \mathbb{R})$ où $X \times Y$ est compact. Cette sous-algèbre contient les fonctions constantes. Pour pouvoir appliquer le théorème de Stone-Weierstrass (qui conduit à la conclusion souhaitée), on a donc juste besoin de vérifier que $\mathcal{A}$ sépare les points.

On se donne $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ et $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y$ un couple de points distincts dans $X \times Y$. La fonction φ définie via $\varphi(x,y) = d(x, \tilde{x}) + d(y, \tilde{y})$ est dans $\mathcal{A}$, s'annule en $(\tilde{x}, \tilde{y})$, et est strictement positive en $(\bar{x}, \bar{y})$.