Portail MIPE, Licence de Mathématiques, Module B02/L1, 2006-2007

Suites et séries numériques.

1 Premières propriétés des nombres réels.

1.1 Introduction

Vous avez déjà rencontré des ensembles de nombres et travaillé avec eux, par exemple :
– l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ;
– l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs ;
– l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux, c'est à dire de la forme $n10^p$, où n et p sont des entiers relatifs ;
– l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels :
– l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ;

Ces ensembles vérifient les relations d'inclusion suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
La représentation intuitive de $\mathbb{R}$ se fait sous la forme d'une droite. Néanmoins cette représentation graphique ne permet pas de bien comprendre la distinction entre les réels et les rationnels. Vous connaissez des nombres réels qui ne sont pas rationnels, par exemple $\sqrt{2}$, e ou π, mais il y en a beaucoup d'autres. Ce cours sur les suites permettra entre autres choses d'affiner notre perception, de préciser le "beaucoup" et quelles propriétés on attend de $\mathbb{R}$. A partir de là, on peut construire effectivement un ensemble qui répond à ces attentes. Nous en dirons un mot plus tard.
Pour l'instant, nous supposerons connus ces ensembles ainsi que leurs propriétés usuelles, concernant l'addition, la multiplication et la relation d'inégalité $\leq$. Pour $\mathbb{R}$, nous les rappelons dans les sections suivantes.
On peut aussi considérer l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, sous leur forme cartésienne $x+iy$ ou polaire $\rho e^{i\theta}$; il se construit facilement à partir de $\mathbb{R}$. Sa représentation intuitive est celle d'un plan, dit plan complexe.

1.2 Opérations sur les réels

Rappelons les propriétés essentielles de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de deux opérations, l'addition $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$ et la multiplication $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \times y$ (dites "lois de composition interne"), qui ont les propriétés suivantes

1. L'addition est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.
2. Elle est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$.
3. $\mathbb{R}$ admet un élément neutre pour $+$, noté 0 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = 0 + x = x$.
4. Tout élément x de $\mathbb{R}$ admet un inverse pour $+$: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = y + x = 0$. Cet inverse est unique. On l'appelle opposé et on le note $-x$. On abrège l'écriture $x + (-y)$ en $x - y$.
5. La multiplication est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
6. Elle est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \times y = y \times x$.

7. $\mathbb{R}$ admet un élément neutre pour $\times$, noté 1 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \times 1 = 1 \times x = x$.
8. Tout élément x de $\mathbb{R}^*$ admet un inverse pour $\times$: $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*, x \times y = y \times x = 1$. Cet inverse est unique. On le note x^{-1} ou $\frac{1}{x}$. On abrège l'écriture $x \times \frac{1}{y}$ en $\frac{x}{y}$.
9. Les lois de composition internes $+$ et $\times$ sont compatibles : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$ et $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$.

L'ensemble de ces propriétés se résume en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est **corps commutatif**.

1.3 Relation d'inégalité $\leq$

L'ensemble $\mathbb{R}$ est la réunion de deux sous ensembles $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$, d'intersection $\{0\}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on dit que x est positif si $x \in \mathbb{R}_+$, ce qu'on note $0 \leq x$ et que x est négatif si $x \in \mathbb{R}_-$, ce qu'on note $x \leq 0$. Soit deux réels x, y ; on note $x \leq y$ si $(x - y) \leq 0$, et on lit : "x est inférieur ou égal à y". On note aussi $x < y$ si ($x \leq y$ et $x \neq y$).

Rappelons les premières propriétés de la relation $\leq$:

1. Antisymétrie : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $(x \leq y$ et $y \leq x) \Rightarrow x = y$.
2. Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$
3. Transitivité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x \leq y$ et $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.
4. Totalité : On peut toujours comparer deux réels : $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq y)$ ou $(y \leq x)$.
5. Cette relation est compatible avec $(+)$: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$,
6. Elle est compatible avec $(\times)$: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\quad (0 \leq z$ et $x \leq y) \Rightarrow (z \times x \leq z \times y)$.

L'ensemble de ces propriétés se résume en disant que le corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ est
totalement ordonné.

Conséquences

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y \Rightarrow -y \leq -x)$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (z \leq 0 \quad$ et $\quad x \leq y) \Rightarrow (z \times y \leq z \times x)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (0 < x \Rightarrow 0 < \frac{1}{x})$ et $(x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0)$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (0 < x \leq y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x})$.

Cette relation conduit à la notion de valeur absolue :

Définition 1.1. *Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction valeur absolue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, en posant pour $x \in \mathbb{R}$:*

$$(|x| = x \, si \quad 0 \leq x) \quad et \quad (|x| = -x \, si \quad x \leq 0)$$

Propriétés Pour tout réel x, on a :

$$0 \leq |x| \quad \text{et} \quad (|x| = 0 \Rightarrow x = 0)$$

$$|x| = |-x|, \quad \sqrt{x^2} = |x| \quad \text{et} \quad |x| = \max(x, -x)$$

Pour tous réels x, y, on a
$$|xy| = |x||y|$$
et les inégalités triangulaires :
$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

1.4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 1.2. *Soient a, b des réels, avec $a \leq b$. On définit les intervalles suivants :*

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$
2. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a < b\}$
3. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
4. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
5. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
6. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
7. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
8. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

Dans les quatre premiers cas, a et b sont les bords de l'intervalle, $b - a$ est sa longueur et son centre est $\frac{a+b}{2}$. Dans les quatre derniers cas, on parle aussi de demi-droites de bord a.

Un intervalle I est ouvert s'il est de la forme $]a, b[$, $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$, fermé s'il est de la forme $[a, b]$, $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$.
L'adhérence de I est le plus petit fermé qui contient I, c'est à dire $[a, b]$ pour un intervalle de bords a et b, $[a, +\infty[$ dans les cas 5 et 6, $]-\infty, a]$ dans les cas 7 et 8. On la note $\overline{I}$.

Remarque importante Soient ℓ et x deux réels et $\varepsilon > 0$. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

1. $|x - \ell| < \varepsilon$
2. $\ell - \varepsilon < x < \ell + \varepsilon$
3. $x \in \;]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.

L'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ est centré en ℓ, ε est son rayon et $|x - \ell|$ est la distance de x à ℓ.

Proposition 1.3. *Soit I un intervalle. Si x et y sont dans I et $x \leq y$, alors $[x, y] \subset I$. (On dit que I est convexe.)*

Démonstration On se ramène facilement au cas d'un intervalle I de bords a et b, $a < b$. Soient x, y dans I et $z \in [x, y]$. Si $z = x$ ou $z = y$, on a $z \in I$ par hypothèse. Sinon, on a $a \leq x < z < y \leq b$, donc $z \in]a, b[$ et comme $]a, b[$ est inclus dans I, on obtient $z \in I$. Donc $[x, y] \subset I$. ■

Proposition 1.4. *Soit I un intervalle ouvert et ℓ un élément de I. Il existe alors un intervalle ouvert, contenu dans I et de centre ℓ.*

Démonstration Ici aussi, on se ramène facilement au cas d'un intervalle $]a, b[$. Notons $\varepsilon = \min(\ell - a, b - \ell)$. On a $\varepsilon > 0$, $\ell + \varepsilon \leq \ell + (b - \ell) = b$ et $a = \ell - (\ell - a) \leq \ell - \varepsilon$. Donc $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$ sont dans l'intervalle $[a, b]$ et d'après la proposition précédente, l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ est contenu dans $]a, b[$. ∎

1.5 Majorants et minorants

Définitions Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

1. Un réel M est un majorant de E si $\forall x \in E$, $x \leq M$.
2. Un réel m est un minorant de E si $\forall x \in E$, $m \leq x$.
3. L'ensemble E est majoré s'il admet un majorant, minoré s'il admet un minorant, borné s'il admet un majorant et un minorant.

Remarque. Un ensemble E est borné si et seulement si il existe B tel que $\forall x \in E$, $|x| \leq B$.

1.6 Propriété d'Archimède.

Propriété d'Archimède. Pour tout réel x, il existe un entier naturel n tel que $x < n$.

Remarque. Ceci équivaut à dire que le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ formé des entiers naturels n'est pas majoré.

Conséquence 1. Pour tout réel x, il existe un et un seul entier relatif k tel que $k \leq x < k + 1$. Cet entier est noté $E[x]$ et l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto E[x]$ est appelée fonction partie entière.

Démonstration Considérons d'abord le cas où $x \in \mathbb{R}_+$. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier n_0 tel que $x < n_0$. L'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \leq x\}$ est contenu dans $\{0, 1 \ldots, n_0 - 1\}$, il est donc fini. Soit k le plus grand des éléments de E. On a alors $k \leq x < k+1$.
Supposons maintenant $x \in \mathbb{R}_-$. On vient de voir qu'il existe un entier k' tel que $k' \leq -x < k'+1$. On obtient $-k' - 1 < x \leq -k'$. Si $x \in \mathbb{Z}$, on pose $k = -k'$ et sinon, on pose $k = -k' - 1$; dans les deux cas, on a $k \leq x < k + 1$.
Supposons maintenant, qu'il existe deux entiers k et k' tels que $k \leq x < k+1$ et $k' \leq x < k' + 1$. On obtient $k \leq x < k' + 1$, donc $k < k' + 1$, soit $k \leq k'$. De même, $k' \leq x < k + 1$, d'où $k' \leq k$. Finalement $k = k'$. Ceci prouve l'unicité de l'entier recherché. ∎

Conséquence 2. Tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un rationnel et un irrationnel.

Démonstration

On peut se ramener au cas d'un intervalle ouvert non vide, $]a, b[$, où $a < b$.
On cherche d'abord un rationnel $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $a < \frac{p}{q} < b$, c'est-à dire $aq < p < bq$. Pour q fixé, si on note $n = E[aq]$ et si on prend $p = n + 1$, on a $n \leq aq < n + 1 \leq aq + 1$. Si q vérifie $aq + 1 < bq$, on aura $aq < p < bq$, comme voulu.

Il suffit donc de choisir q tel que $\frac{1}{b-a} < q$ (ce qui est possible d'après la propriété d'Archimède), puis $p = E[aq] + 1$.

L'intervalle $]a - \sqrt{2}, b - \sqrt{2}[$ contient de même un rationnel r. On en déduit que $r + \sqrt{2}$ appartient à $]a, b[$. Or $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, donc $r + \sqrt{2}$ non plus. On a trouvé un irrationnel dans $]a, b[$.
$\blacksquare$

2 Suites numériques

Dans cette section, on étudie les premières propriétés de convergence des suites réelles, puis complexes.

2.1 Définitions

Définition 2.1. *On appelle suite réelle toute application* $n \mapsto u_n$ *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$*, On la note* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$*,* u_n *est appelé terme d'indice* n *de la suite.*

Il arrive qu'on ne définisse que les termes de la suite dont l'indice est supérieur à un entier n_0. On notera alors parfois $(u_n)_{n\geq n_0}$ une telle suite.

Exemples.

1. Les termes de la suite peuvent être donnés par une formule, par exemple :
   $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos n$ ou $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n-1}{n^2+3}$.
2. On peut chercher à étudier les suites vérifiant une relation de récurrence, par exemple les suites telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin u_n$.
3. De même pour des récurrence à deux pas : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
4. On obtient souvent des suites quand on étudie l'évolution d'un système. Par exemple, si on lance une balle qui rebondit au sol, on peut se poser la question de savoir si la balle s'arrête au bout d'un certain temps ou si elle rebondit indéfiniment. Pour cela, on peut considérer la suite (t_n) des instants où la balle rebondit, et la suite (v_n) des vitesses de rebonds au sol. Pour que ces suites soient bien définies, on fera la convention que si la balle s'immobilise au bout de N rebonds, on pose pour $n \geq N$, $t_n = t_N$ et $v_n = 0$. Cette étude se fera en fonction des hypothèses faites (élasticité, frottements, ..) et à l'aide des lois de la physique.

Définition 2.2. *Soit* (u_n) *une suite réelle. Dire qu'elle est croissante (resp. décroissante, strictement croissante, strictement décroissante) signifie que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $u_n \leq u_{n+1}$*, (resp.* $u_{n+1} \leq u_n$*,* $u_n < u_{n+1}$*,* $u_{n+1} < u_n$*). Dire qu'elle est monotone (resp. strictement monotone) signifie qu'elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).*

Exercice. Montrer qu'alors, pour tous les entiers n et m tels que $n < m$, elle vérifie $u_n \leq u_m$ (resp. $u_m \leq u_n$, $u_n < u_m$, $u_m < u_n$).

Définition 2.3. *Soit* (u_n) *une suite réelle. Dire qu'elle est*
– constante signifie que tous les termes de la suite sont égaux : pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n = u_0$*.*
– stationnaire signifie qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont égaux :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0}).$$

– *périodique signifie qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+N} = u_n.$$

Définition 2.4. *Soit (u_n) une suite réelle. Dire qu'elle est majorée (resp. minorée, resp. bornée) signifie que l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ des termes de la suite est majoré (resp. minoré, resp. borné), c'est à dire qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq A, \text{(resp. } \forall n \in \mathbb{N}, A \leq u_n, \text{ resp. } \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq A).$$

2.2 Suites convergentes

Définition 2.5. *Soit (u_n) une suite réelle. Dire qu'elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ signifie qu'un intervalle ouvert arbitrairement petit centré en ℓ et de rayon $\varepsilon > 0$, $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, c'est-à-dire, formellement :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite quand n tend vers l'infini.

Exemples.
(a) Une suite constante ou stationnaire est convergente.
(b) La suite $(\frac{1}{n+1})$ converge vers 0.
En effet, fixons $\varepsilon > 0$. La propriété d'Archimède dit qu'il existe un entier n_0 tel que $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$. On a alors pour tout entier $n \geq n_0$, $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$. D'où le résultat.
(Cette propriété est en fait équivalente à celle d'Archimède.)

Remarques.
- La définition montre que la convergence vers ℓ ne dépend pas des premiers termes de la suite.
- On peut remplacer l'inégalité stricte $|u_n - \ell| < \varepsilon$ de la définition par une inégalité large :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon).$$

En effet, si cette dernière affirmation est vraie, pour $\varepsilon > 0$, on l'applique à $\frac{\varepsilon}{2}$ ce qui donne un n_0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon)$. On en déduit la convergence. La réciproque est immédiate.

Proposition et Définition 2.6. *Unicité : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente ; elle admet alors une seule limite. Ceci justifie de parler de la limite de la suite et si ℓ est cette limite, de noter :*

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n.$$

Démonstration Supposons que $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ sont des limites de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\ell_1 \neq \ell_2$. Fixons $\varepsilon = \frac{|\ell_2 - \ell_1|}{4}$; on a $\varepsilon > 0$, donc par définition de la convergence, on peut trouver $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_1, \quad |u_n - \ell_1| < \varepsilon\,,$$
$$\forall n \geq n_2, \quad |u_n - \ell_2| < \varepsilon.$$

Pour $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$, on obtient grâce à l'inégalité triangulaire :

$$4\varepsilon = |\ell_2 - \ell_1| \leq |\ell_2 - u_{n_3}| + |u_{n_3} - \ell_1| < 2\varepsilon.$$

Cela est impossible puisque $\varepsilon > 0$. ■

Exercice. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$.

Proposition 2.7. *Pour une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel ℓ, on a l'équivalence entre*

(i) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$,

(ii) $\lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$,

(iii) *il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 0 telle que $(\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq v_n)$.*

Démonstration
- Supposons (i), c-à-d. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$.
On en déduit (ii), en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| = ||u_n - \ell| - 0|$.
- La condition (ii) implique la condition (iii). Il suffit de prendre $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = |u_n - \ell|$.
- Supposons (iii) et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe par hypothèse, une suite (v_n) telle que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\forall n, |u_n - \ell| \leq v_n$. La convergence de (v_n) vers 0 donne un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $|v_n| < \varepsilon$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on obtient $|u_n - \ell| \leq v_n < \epsilon$.
D'où la convergence de (u_n) vers ℓ. ■

Proposition 2.8. *Soit (u_n) une suite réelle.*

(i) *Si elle converge, elle est bornée.*

(ii) *Si elle n'est pas bornée, elle ne converge pas.*

Démonstration (i) Il suffit de prendre $\varepsilon = 1$ dans la définition de la convergence de (u_n) vers ℓ. Cela donne un n_0 tel que si $n \geq n_0$, $|u_n| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|$. On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \max\{|u_0|, \ldots, |u_{n_0}|, 1 + |\ell|\}.$$

(ii) s'obtient en prenant la contraposée de la proposition (i). ■

Exercice. On considère la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}).$$

Vérifier qu'il existe une et une seule suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant cette relation et telle que $u_0 = 2$. Etudier l'éventuelle monotonie de (u_n) et montrer que (u_n) est bornée.

Soit (u_n) une suite réelle. On considère souvent les deux suites (v_n) et (w_n) définies par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_{2n} = u_{2n+1}$. Les suites $(v_n) = (u_{2n})$ et $(w_n) = (u_{2n+1})$ sont respectivement appelées sous-suite des termes d'indices pairs et sous-suite des termes d'indices impairs de (u_n).

Exemple. Considérons la suite $(u_n) = ((-1)^n)$. La sous-suite des termes d'indices pairs est la suite (v_n) constante, égale à (1), et celle des termes d'indices impairs est la suite (w_n) constante, égale à (-1).

Proposition 2.9. *Soit* (u_n) *une suite réelle et* $\ell \in \mathbb{R}$. *Il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :*

(i) *La suite* (u_n) *admet* ℓ *pour limite.*

(ii) *Les deux sous-suites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *admettent* ℓ *pour limite.*

Démonstration (i) Supposons que (u_n) converge vers ℓ.
Fixons $\varepsilon > 0$ (arbitrairement petit).
Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon)$. Alors pour $n \geq n_0$, on a $2n \geq n_0$ et $2n+1 \geq n_0$, donc $|u_{2n} - \ell| < \varepsilon$ et $|u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$, c'est-à-dire $|v_n - \ell| < \varepsilon$ et $|w_n - \ell| < \varepsilon$.
On en déduit que les deux suites (v_n) et (w_n) convergent vers ℓ.
(ii) Supposons que les sous-suites (v_n) et (w_n) convergent toutes les deux vers ℓ.
Fixons $\varepsilon > 0$ (arbitrairement petit).
Il existe deux entiers n_0 et n_1 tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n \geq n_0 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon)$$

$$(n \geq n_1 \Rightarrow |w_n - \ell| < \varepsilon).$$

Posons $n_2 = \sup(2n_0, 2n_1 + 1)$ et soit $n' \in \mathbb{N}$, $n' \geq n_2$.
Si n' est pair, $n' = 2n$ avec $n \geq n_0$ et on a $u_{n'} = v_n$, donc $|u_{n'} - \ell| = |v_n - \ell| < \varepsilon$.
Si n' est impair, $n' = 2n+1$ avec $n \geq n_1$ et on a $u_{n'} = w_n$, donc $|u_{n'} - \ell| = |w_n - \ell| < \varepsilon$. Donc $(n' \geq n_2 \Rightarrow |u_{n'} - \ell| < \varepsilon)$.
De tout ceci, on déduit que la suite $(u_{n'})$ converge vers ℓ. ■

Exemples.
(a) La suite $((-1)^n)$ ne converge pas. En effet, les deux sous-suites (v_n) et (w_n) sont constantes, donc convergentes, mais leurs limites sont distinctes.
(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_{2n} = \frac{2n+3}{4n}$ et $u_{2n+1} = \frac{n-5}{2n+1}$. On obtient (voir 2.12) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \frac{1}{2}$, donc (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

2.3 Limites et inégalités

Proposition 2.10. *Soit* (u_n) *une suite réelle qui converge vers* $\ell \in \mathbb{R}$ *et soit* $\ell' \in \mathbb{R}$.

(i) *Si* $\ell < \ell'$, *il existe un entier* n_0 *tel que pour* $n \geq n_0$, $u_n < \ell'$.

(ii) *Si* $\ell' < \ell$, *il existe un entier* n_1 *tel que pour* $n \geq n_1$, $\ell' < u_n$.

Démonstration (i) En prenant $\varepsilon = \frac{\ell'-\ell}{2}$ dans la définition de la convergence de (u_n) vers ℓ, on obtient un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon = \frac{\ell+\ell'}{2} < \ell'$.
On procède de même pour démontrer (ii). ■

Proposition 2.11. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles convergentes. Si elles vérifient* $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n)$, *alors on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Démonstration Notons $\ell = \lim_{n\to+\infty} v_n$ et $\ell' = \lim_{n\to+\infty} u_n$. On va montrer l'implication $(\ell < \ell' \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ v_n < u_n)$, (c'est-à-dire la contraposée de la proposition annoncée.)
Pour cela, supposons $\ell < \ell'$.
On a alors $\ell < \frac{\ell+\ell'}{2} < \ell'$. Par la proposition 2.10, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad v_n < \frac{\ell + \ell'}{2}.$$

De même, on peut trouver $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_1, \quad \frac{\ell + \ell'}{2} < u_n.$$

Pour $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, on a $v_{n_2} < \frac{\ell+\ell'}{2} < u_{n_2}$.
Il existe donc bien un entier n tel que $v_n < u_n$. ■

$\triangle$ Les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite : considérer par exemple les suites $(u_n) = (0)$ et $(v_n) = (\frac{1}{n+1})$.

2.4 Limites et opérations.

Théorème 2.12. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes, $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n\to+\infty} v_n$ On a les propriétés suivantes :*

(i) *si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} (\lambda u_n) = \lambda\ell$*

(ii) $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell'$

(iii) $\lim_{n\to+\infty} (u_n v_n) = \ell \times \ell'$

(iv) *si $\ell \neq 0$, on a $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n_0 et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq n_0} = \frac{1}{\ell}$.*

Démonstration (i) Si $\lambda = 0$, il est clair que $\lim_{n\to\infty} \lambda u_n = 0 = \lambda \times \ell$.
Soit λ un réel non nul. Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel pour tout entier $n \geq n_0$, on a $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$. On obtient alors pour $n \geq n_0$, $|\lambda u_n - \lambda\ell| < |\lambda|\frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \epsilon$.
D'où $\lim_{n\to+\infty} (\lambda u_n) = \lambda\ell$.
(ii) Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{aligned} &\forall n \geq n_1, \quad |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{et} \quad &\forall n \geq n_2, \quad \left|v_n - \ell'\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Or, pour tout entier n, on a $|u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|$.
Notons $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$. On obtient

$$\forall n \geq n_3, \quad \left|u_n + v_n - (\ell + \ell')\right| < \varepsilon.$$

On a montré (ii).

(iii) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée. Soit M un réel tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. On écrit pour n entier :

$$\begin{aligned} \left|u_n v_n - \ell\ell'\right| &= \left|u_n v_n - \ell' u_n + \ell'(u_n - \ell)\right| \\ &\leq |u_n|\left|v_n - \ell'\right| + \left|\ell'\right||u_n - \ell| \leq M\left|v_n - \ell'\right| + \left|\ell'\right||u_n - \ell|. \end{aligned}$$

D'après (i) et (ii), le terme de droite a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$. On applique alors la proposition 2.7.
(iv) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell| > |\frac{\ell|}{2}$, donc d'après la proposition 2.10, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| > |\frac{\ell}{2}| > 0$. Par suite, on a pour tout entier $n \geq n_0$:

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - u_n|}{|\ell||u_n|} \leq \frac{2|\ell - u_n|}{\ell^2}.$$

Le dernier membre a pour limite 0. On conclut en appliquant encore la proposition 2.7. ∎

Théorème 2.13. Théorème des gendarmes.
Soit trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leq u_n \leq w_n \\ \textit{et} \quad &\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell. \end{aligned}$$

Alors, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration Pour tout entier n, on a $|u_n - v_n| \leq w_n - v_n$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n - v_n) = \ell - \ell = 0$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $u_n = v_n + (u_n - v_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell + 0 = \ell$. ∎

3 Limites infinies.

3.1 Définitions.

Définition 3.1. *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si*

$$\begin{aligned} &\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > M. \\ (\textit{resp.} \quad &\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n < -M). \end{aligned}$$

Remarques.
- Autrement dit pour $M > 0$ arbitrairement grand, tous les u_n sont dans $]M, +\infty[$ (resp. dans

$]-\infty, -M[$) à partir d'un certain rang.
- Une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ n'est pas bornée : elle n'est donc pas convergente. On dit parfois qu'elle diverge vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$).

Exercices.
- Montrer que dans les définitions précédentes, on peut remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges et aussi prendre $M \in \mathbb{R}$ au lieu de $M \in \mathbb{R}_+^*$.
- On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Vérifier qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au plus une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Ceci justifie l'écriture $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Généraliser la proposition 2.9 au cas où $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
- Ecrire à l'aide de quantificateurs les définitions de suites non majorées, non minorées et non bornées. Donner un exemple de suite non majorée qui n'a pas pour limite $+\infty$.

3.2 Calculs de limites (bis).

Proposition 3.2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont tous les termes sont strictement positifs (respectivement strictement négatifs). Alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = -\infty$).*

Démonstration (i) Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (*).
Soit $M > 0$. On utilise la définition de (*) : en particulier, pour $\epsilon = \frac{1}{M}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, on a $0 < u_n < \frac{1}{M}$. On a trouvé $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que ($\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{u_n} > M$), et ce pour $M > 0$ arbitrairement grand.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.
(ii) Supposons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq n_1, \quad \frac{1}{u_n} > \frac{1}{\varepsilon}.$$
On a trouvé $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : ($\forall n \geq n_1, \quad 0 < u_n < \varepsilon$) et ce pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. ∎

Proposition 3.3. *Soit deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
(i) *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
(ii) *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Démonstration (i) Soit $M > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq n_0, \quad v_n \geq u_n > M.$$

On en déduit $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$
(ii) Considérer $(-u_n)$ et $(-v_n)$. ∎

Proposition 3.4. *On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et deux éléments ℓ et ℓ' de $\overline{\mathbb{R}}$ tels que :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'.$$

Les tableaux suivants résument les règles de calculs de $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$ et de $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)$ lorsque l'on peut conclure.

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$?	$\ell\in\mathbb{R}$	$\ell=+\infty$	$\ell=-\infty$
$\ell'\in\mathbb{R}$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'=+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$\ell'=-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)$?	$\ell\in\mathbb{R}_+^*$	$\ell\in\mathbb{R}_-^+$	$\ell=+\infty$	$\ell=-\infty$	$\ell=0$
$\ell'\in\mathbb{R}_+^*$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell'=+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
$\ell'=0$	0	0	FI	FI	0

L'abréviation FI signifie « Forme Indéterminée » : dans ces cas, il peut arriver n'importe quoi si on n'a pas d'information supplémentaire sur les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples dans le cas où $\ell=+\infty, \ell'=-\infty$.

(i) $(u_n)=(n)$, $(v_n)=(-n+(-1)^n)$, $(u_n+v_n)=((-1)^n)$ ne converge pas ;

(ii) $(u_n)=(n)$, $(v_n)=(-n^2)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=-\infty$;

(iii) $(u_n)=(n^2)$, $(v_n)=(-n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=+\infty$;

(iv) $(u_n)=(\sqrt{n})$, $(v_n)=(-\sqrt{n+1})$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=0$.

Démonstration du résultat $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=+\infty$, dans le cas $\ell\in\mathbb{R}$, $\ell'=+\infty$.
On veut montrer que dans ce cas :

$$\forall M\in\mathbb{R}, \exists n_0, \forall n\in\mathbb{N}, (n\geq n_0 \Rightarrow (u_n+v_n)>M).$$

Fixons un réel M. Dans le cas présent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, donc est bornée. On peut donc trouver un réel M_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}, -M_0 \leq u_n \leq M_0$.
D'autre part, la suite (v_n) a pour limite $+\infty$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad v_n > M + M_0.$$

On a alors pour tout $n \geq n_0$

$$u_n + v_n \geq -M_0 + (M + M_0) = M$$

ceci avec $M > 0$ arbitrairement grand. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$.

Exercice.
Rédiger les démonstrations pour toutes les cases du tableau. Dans le cas des formes indéterminées, donner des exemples illustrant les différentes possibilités.

Des méthodes pour calculer des limites :

(i) Majorer ou minorer la suite pour se ramener à une suite plus simple.
$|\frac{\sin n}{n+1}| \leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n+1} = 0$.

(ii) Mettre en évidence les termes prépondérants pour lever les indéterminations.
$\frac{n^2+1}{n-1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n-1} = \frac{1-0}{1+0} = 1$.

On verra d'autres méthodes plus loin (5.2).

4 Exemples importants

4.1 Suites géométriques.

Définition 4.1. *Soit $q \in \mathbb{R}$. Une suite géométrique de raison q est une suite donnée par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = u_0 q^n.$$

Proposition 4.2. *Soit $q \in \mathbb{R}$.*

(i) *Si $q = 1$, la suite (q^n) est constante et égale à 1.*

(ii) *Si $1 < q$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.*

(iii) *Si $|q| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.*

(iv) *Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a aucune limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

(v) *Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.*

$$\textit{Si } q = 1, \textit{ on a } \forall n \in \mathbb{N},\, S_n = n + 1.$$

$$\textit{Si } q \neq 1, \textit{ on a } \forall n \in \mathbb{N},\, S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration (ii) Posons $q = 1 + a$, où $a > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule du binôme donne :

$$q^n = (1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k = 1 + na + \ldots + a^n.$$

On en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$, $q^n \geq 1 + na$, d'où $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ d'après la proposition 3.3.
(iii) Posons $q' = |\frac{1}{q}|$. On a $q' > 1$, donc $\lim_{n \to +\infty} q'^n = +\infty$, d'après (ii). Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $|q^n| = \frac{1}{q'^n}$, on obtient $\lim_{n \to +\infty} |q^n| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$.
(iv) Comme $|q| > 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} |q^n| = +\infty$. La suite (q^n) n'est pas bornée, donc elle diverge. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $q^n = (-1)^n |q|^n$. Donc la sous-suite des termes d'indices pairs (q^{2n}) (resp. celle des termes d'indices impairs (q^{2n+1})) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$). La suite (q^n) n'a donc aucune limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
(v) Le cas $q = 1$ est évident. Supposons $q \neq 1$. On écrit $S_n = 1 + q + \ldots + q^n$ et $qS_n = q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}$, d'où en faisant la différence : $(1-q)S_n = (1 + q + \ldots + q^n) - (q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}$. Il reste à diviser par $1 - q$. ■

4.2 Suites de puissances de n.

Proposition 4.3. *Soit $p \in \mathbb{Z}$. Considérons la suite $(n^p)_{n \geq 1}$ des puissances p-ème de n.*

(i) *Si $p = 0$, cette suite est constante, égale à 1.*

(ii) *Si $p > 0$, on a $\lim_{n \to +\infty} n^p = +\infty$.*

(iii) *Si $p < 0$, on a $\lim_{n \to +\infty} n^p = 0$.*

Démonstration
(i) est évident.
(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n^p \geq n$. Or $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$. D'où le résultat d'après la proposition 3.3.
(iii) Soit $p' = -p$. D'après (ii), on a $\lim_{n \to +\infty} n^{p'} = +\infty$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^p = \frac{1}{n^{p'}}$, donc $\lim_{n \to +\infty} n^p = 0$, d'après la proposition 3.2. ■

4.3 Comparaison des suites géométriques et des suites de puissances.

Quand on multiplie une suite géométrique par une suite de puissances de n, les règles de calculs données dans les tableaux de la proposition 3.4 aboutissent parfois à des formes indéterminées. La proposition suivante permet de lever ces indéterminations.

Proposition 4.4. *Soit $q \in \mathbb{R}_+$ et $p \in \mathbb{N}^*$.*

(i) *Si $1 < q$, on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{q^n}{n^p} = +\infty$.*

(ii) *Si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n n^p = 0$.*

Démonstration (i) On a $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty$, d'où une forme indéterminée. On considère deux cas.

Cas $p = 1$. Comme dans la démonstration de la proposition 4.2, si on pose $q = 1+a$, $a > 0$ et si on utilise la formule du binôme, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $q^n \geq 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\ldots+a^n$, donc $\frac{q^n}{n} \geq \frac{n-1}{2}a^2$. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n} = +\infty$.

Cas général. On se ramène au cas précédent en posant $r = q^{\frac{1}{p}}$. En effet, on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^n = (r^p)^n = r^{np} = (r^n)^p$, donc $\frac{q^n}{n^p} = (\frac{r^n}{n})^p$. Comme $1 < r$, on a d'après ce qui précède, $\lim_{n\to+\infty} \frac{r^n}{n} = +\infty$. Les résultats sur le produit de deux suites s'étendent au produit de p suites : on obtient donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^p} = +\infty$.

(ii) Posons $q' = \frac{1}{q}$; comme $1 < q'$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{q'^n}{n^p} = +\infty$, c-à-d. $\lim \frac{1}{q^n n^p} = +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} q^n n^p = 0$, d'après la proposition 3.2. ■

En étudiant les autres cas, on arrive au résultat :

Pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{R}_+, q \neq 1$, les suites $(q^n n^p)$ et (q^n) ont même limite.

5 Limites de suites et limites de fonctions.

5.1 Rappels de A01

Définition 5.1. Notions de limite de fonctions. *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, $\ell \in \overline{I} \cap \overline{\mathbb{R}}$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Dire que $f(x)$ a pour limite L quand x tend vers ℓ signifie, suivant les cas :*

(i) Cas ℓ et L réels (limite finie en un point fini)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - \ell| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

(ii) Cas $\ell \in \mathbb{R}$ et $L = +\infty$ (limite $+\infty$ en un point fini)

$$\forall M > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - \ell| \leq \eta \Rightarrow f(x) > M).$$

(iii) Cas $\ell = +\infty$ et $L \in \mathbb{R}$ (limite finie en $+\infty$)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, (x > A \Longrightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon).$$

(iv) Cas $\ell = +\infty$ et $L = +\infty$ (limite $+\infty$ en $+\infty$)

$$\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, (x > A \Rightarrow f(x) > M).$$

Dans tous les cas, si $f(x)$ admet une limite L quand x tend vers ℓ, cette limite est unique et on note $\lim_{x\to\ell} f(x) = L$.

On a des définitions analogues pour $-\infty$.

Exemples. (i) Retenir

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty.}$$

(ii) *Utilisation de dérivées.* Par exemple $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, c-à-d. par définition $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \cos 0 = 1$; de même $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = 1$. Retenir :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0} = \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.}$$

Définition 5.2. Fonction continue. *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.*
Dire que la fonction f est continue en un point x_0 de I signifie que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Dire qu'elle est continue sur I signifie qu'elle est continue en tout point de I.

La notion de fonction continue est en particulier facile à manipuler car elle se comporte bien avec les différentes opérations.

Proposition 5.3. *La somme, les combinaisons linéaires, le produit de deux fonctions continues sur I sont continus sur I. Le quotient $\frac{f}{g}$ de deux fonctions continues sur I dont le dénominateur g ne s'annule jamais sur I est continu sur I. Si $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ est continue et si $g : J \to \mathbb{R}$ est continue, alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue.*

Exemples. Les polynômes, les fonctions exponentielles, sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$. Le logarithme est continu sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto x^\alpha$ (où $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$) est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

5.2 Utilisation de limites de fonctions.

Proposition 5.4. *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, $\ell \in I$ et (u_n) une suite de réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.*
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si f est continue sur I (ou au moins en ℓ), alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (|x-\ell| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon)\,.$$

Pour un tel $\alpha > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| < \alpha.$$

On a trouvé $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon\,,$$

ce pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. D'où le résultat. ■

Plus généralement, on montre de même :

Proposition 5.5. *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I, (u_n) une suite de réels, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = L$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.*

Exemples.
(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.
(ii) $n\sin(\frac{1}{n}) = \frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin(\frac{1}{n}) = 1$.
(iii) *Fonctions puissances.*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$. En utilisant les limites des fonctions ln et exp à l'infini, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 1$ si $\alpha = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$, si $\alpha > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$, si $\alpha < 0$. Ceci généralise la proposition 4.3.
(iv) *Comparaison des exponentielles et des puissances.*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q > 0$. On peut écrire (en passant à la forme exponentielle et en mettant le terme prépondérant n en facteur) : $n^\alpha q^n = \exp[n(\alpha\frac{\ln n}{n} + \ln q)]$. En utilisant $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, on obtient :

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}_+, q \neq 1$, la suite $(n^\alpha q^n)$ se comporte comme la suite (q^n).

Ceci généralise les résultats de 4.4.
Conseil. Pour lever une indétermination, lorsqu'apparaissent des fonctions puissances et exponentielles, passer à la forme exponentielle.

5.3 Complément.

La proposition 5.4 admet une réciproque :

Proposition 5.6. *Soit I un intervalle, $\ell \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I. Si pour* **toute** *suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$, alors la fonction f est continue en ℓ.*

Démonstration On montre la proposition contraposée de celle annoncée. Supposons que f n'est pas continue en $\ell \in I$. Nous allons construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que (u_n) converge vers une limite ℓ, mais $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(\ell)$.
La non continuité de f en ℓ dit qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x_\alpha \in]\ell-\alpha, \ell+\alpha[\cap I$ tel que

$$|f(x_\alpha) - f(\ell)| > \varepsilon_0.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, en considérant le cas où $\alpha = \frac{1}{n+1}$, on peut choisir $u_n \in \left]\ell - \frac{1}{n+1}, \ell + \frac{1}{n+1}\right[\cap I$ tel que

$$|f(u_n) - f(\ell)| > \varepsilon_0.$$

On a trouvé une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I telle que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(\ell)| > \varepsilon_0.$$

La suite image $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(\ell)$. ■

6 Suites complexes.

6.1 Le corps des nombres complexes.

L'ensemble des nombres complexes est, comme $\mathbb{R}$, muni d'une addition et d'une multiplication, qui en font un corps commutatif. En revanche, la relation d'inégalité ne se prolonge pas à $\mathbb{C}$. Les propriétés vues jusqu'ici, qui ne dépendent pas de cette relation, mais seulement de l'addition et de la multiplication, s'étendent sans difficulté à $\mathbb{C}$.
Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit sous forme cartésienne $z = a + ib$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, (d'une et d'une seule façon). On définit alors son module $|z|$ par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Si $z \neq 0$, z s'écrit sous forme polaire $z = |z|e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$; dans ce cas, on a aussi pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $z = |z|e^{i(\theta+2k\pi)}$; les nombres $\theta + 2k\pi$ sont appelés arguments de z.
Exemples. $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

6.2 Convergence des suites complexes.

Définition 6.1. *On appelle suite complexe toute application $n \mapsto u_n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.*

Définition 6.2. *Dire qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$ signifie que la suite réelle $(|u_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Remarque. Ceci veut dire

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Autrement dit, si on se donne un petit disque ouvert de centre ℓ, u_n appartient à ce disque dès que n est assez grand.

Exercices.
- Généraliser la proposition 2.6 : montrer que si une suite complexe (u_n) converge, elle ne peut avoir qu'une seule limite, ce qui justifie la notation $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
- Montrer que si la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, alors la suite réelle $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.

Proposition 6.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. On écrit sous forme cartésienne $\ell = a + ib$ et pour tout entier n, $u_n = a_n + ib_n$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$).*
Il y a alors équivalence entre les deux propriétés suivantes :
(i) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$
(ii) $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$.

Démonstration Supposons (i). Pour tout entier n, on a :

$$|a_n - a| \leq |u_n - \ell| \quad \text{et} \quad |b_n - b| \leq |u_n - \ell|\,;$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} |a_n - a| = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} |b_n - b| = 0$, ce qui équivaut à (ii).
Réciproquement supposons (ii).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'identité : $|u_n - \ell|^2 = |a_n - a|^2 + |b_n - b|^2$.
Ceci implique $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$. ■

Définition 6.4. *On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

Exercice. Généraliser les propositions 2.7, 2.8 et 2.9, ainsi que le théorème 2.12 au cas des suites complexes.

6.3 Suites géométriques complexes.

Définition 6.5. *Soit $q \in \mathbb{C}$. Comme dans le cas réel, on appelle suite géométrique de raison q une suite de la forme $(u_0 q^n)$ où $u_0 \in \mathbb{C}$.*

On généralise alors la proposition 4.1.

Proposition 6.6. *Soit $q \in \mathbb{C}$.*
(i) *Si $q = 1$, alors (q^n) est constante.*
(ii) *Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.*
(iii) *Si $|q| > 1$, (q^n) n'est pas bornée, donc ne converge pas.*
(iv) *Si $|q| = 1$, $q \neq 1$, la suite (q^n) ne converge pas.*
(v) *Si $q \neq 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.*

Démonstration Pour (ii) et (iii), il suffit de remarquer que $|q^n| = |q|^n$.
(iv) Considérons le cas $|q| = 1$ et supposons que (q^n) converge vers un complexe ℓ. Comme $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} q^n$ et $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = q \lim_{n\to+\infty} q^n$, on a $q\ell = \ell$, soit ($q = 1$ ou $\ell = 0$). Mais la suite des modules $(|q^n|)$ converge vers $|\ell|$, donc $|\ell| = 1$. On en déduit $q = 1$.
La propriété (v) se démontre comme dans le cas réel. ■