LICENCE MIPE
B02 - Suites et Séries Numériques -

Examen Terminal - Semestres S2 et S4

$2^{ème}$ session - le / /2008
Durée : 2 heures
Documents et calculettes sont interdits.
Les quatre exercices de l'épreuve sont indépendants.

Remplir l'en-tête de la copie double et coller l'étiquette indiquant votre code barre d'anonymat selon les instructions.

Reporter votre code barre d'anonymat en bas de cette page et au bas de chaque feuille du fascicule. (Seule cette information permet de vous identifier si le fascicule est séparé de la copie ou si les feuilles sont séparées.)

Vérifier que ce fascicule comporte bien les quatre exercices.

Composer chaque exercice sur le sujet, directement après l'énoncé.

En fin d'épreuve, insérer le fascicule dans la copie double à en-tête.
Bon courage ...

Cadre réservé aux correcteurs.

Exercice 1	points
Exercice 2	points
Exercice 3	points
Exercice 4	points
TOTAL	points

Code barre d'anonymat

Exercice 1. Question de cours. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

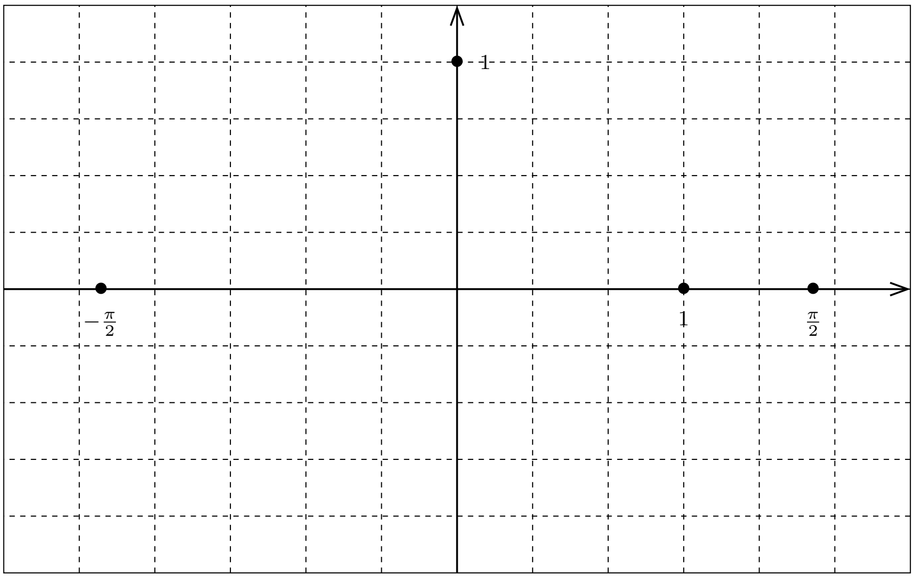
1. Rappeler la définition d'une *suite minorée.*
2. Rappeler la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'est pas minorée et qui ne tend pas vers $-\infty$.

Exercice 2.
Pour n entier, on pose $u_n = \frac{n^3+2^n}{5^n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3. Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin x$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= -\frac{\pi}{2}\,, \\ u_{n+1} &= f(u_n) \quad \text{pour tout } n \text{ appartenant à } \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

1. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.
2. Déterminer les points fixes de f sur $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.
3. Sur le schéma gradué de la page suivante, dessiner le graphe de la fonction f, la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice) et les premières marches de l'escalier permettant de visualiser les premiers termes de la suite.
4. Montrer que : $-1 \leq u_n \leq 0\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*\,.$
5. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente et si oui, quelle est sa limite ?



Code barre d'anonymat

T. S. V. P.

Exercice 4.
Déterminer la nature convergente ou divergente de chacune des **séries** $\sum u_n$ dont le terme général u_n est donné pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

(a) $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+2)}{n}\right)^n$ (b) $u_n = \ln\left(\dfrac{n+2}{n}\right)$ (c) $u_n = \dfrac{n+2}{\sqrt{n^5+1}}$

(d) $u_n = (-1)^n \, e^{\frac{1}{n}}$ (e) $u_n = (-1)^n \, e^{-n}$