Université Rennes I **Année 2006-2007**

Unité d'enseignement B02

Contrôle 3 - Durée : 30 minutes

Exercice 1.

1.1 Trouver $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ de sorte que :

$$f(x) := \tfrac{x+1}{x\,(x-1)^2} = \tfrac{\alpha}{x} + \tfrac{\beta}{x-1} + \tfrac{\gamma}{(x-1)^2}\,, \qquad x \in]1, +\infty[\,.$$

$$\alpha = 1\,, \qquad \beta = -1\,, \qquad \gamma = 2\,.$$

1.2 Identifier une fonction $F :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui est primitive de f.

$$F(x) = \ln\left(\tfrac{x}{x-1}\right) - \tfrac{2}{x-1}\,.$$

Exercice 2. On considère la fonction $g : [0, \frac{\pi}{4}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \sin t$. On admet que g est strictement croissante. A l'aide du changement de variables $x = g(t)$, calculer le nombre réel :

$$a := \int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1 - x^2}\, dx\,.$$

Indication. Utiliser la relation : $2\cos^2 t = 1 + \cos 2\,t$.

$$a = \int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1 - g(t)^2}\; g'(t)\; dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t)^2\; dt$$

$$= \Big[\, \tfrac{1}{2}\, t + \tfrac{1}{4}\, \sin(2\,t) \Big]_0^{\pi/4} = \tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{4}\,.$$

Exercice 3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$b := 3 \int_1^2 x^2 \ \ln x \ dx\,.$$

On pose $f(x) = x^3$ et $g(x) = \ln x$ de sorte que :

$$\begin{aligned} b &= \int_1^2 f'(x)\ g(x)\ dx = \big[\, f(x)\ g(x) \big]_1^2 - \int_1^2 f(x)\ g'(x)\ dx \\ &= \big[\, x^3 \ \ln x \big]_1^2 - \int_1^2 x^2\ dx = 8 \ \ln 2 - \tfrac{7}{3}\,. \end{aligned}$$

Exercice 4. Donner la nature des séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ de termes généraux u_n suivants :

4.1 $u_n = n \ \ln\big(1 + \frac{1}{n}\big)\,.$

On rappelle que :

$$0 \leq x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x\,, \qquad \forall\, x \in [0,1]\,.$$

On en déduit l'encadrement :

$$0 \leq 1 - \tfrac{1}{n} \leq u_n \leq 1\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Ainsi, la suite $\{u_n\}_n$ converge vers la limite $l = 1$ lorsque n tend vers l'infini. Comme $l \neq 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est divergente.

4.2 $u_n = \frac{2\,n}{n+2^n}\,.$

En posant $v_n = \frac{2\,n}{2^n}$, on a :

$$0 \leq u_n \leq v_n\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Par ailleurs :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{2\,n} \longrightarrow l = \frac{1}{2} < 1\,.$$

La règle de d'Alembert garantit la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Par comparaison (entre séries de termes positifs), la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est aussi convergente.