Université Rennes I
Licence MIPE - Mathématiques
Deuxième semestre 2007

Module B02 - Suites et séries.

Deuxième contrôle continu - Durée : 30 minutes.

Lundi 12 mars de 13h15 à 13h45.

Questions de cours.

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée.

1.1. Donner la définition de ce qu'est la *borne supérieure* de A.

C'est le plus petit majorant de A.

1.2. On considère le cas $A = \left\{1 - \frac{1}{n+1} \,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Déterminer le nombre $\sup A$.

$\sup A = 1$. En effet 1 est clairement un majorant. C'est le plus petit majorant de A car si $\varepsilon > 0$, il existe n entier tel que $1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \varepsilon$. Il suffit en effet de choisir n de façon à ce que $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ (ce qui est possible car $\mathbb{R}$ est archimédien).

2. Répondre (sans justification) par OUI ou par NON aux affirmations suivantes (on demande de rayer la mention fausse) :

2.1. Toute suite croissante est convergente. **NON**. *Prendre $(n)_n$.*

2.2. La suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = n^3\,(1/\sqrt{3})^n$ tend vers $+\infty$. **NON**. *D'après le cours, cette suite $(u_n)_n$ tend vers 0.*

Exercice. Pour n entier avec $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\,\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cdots\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)\,\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Noter la relation $u_n = u_{n-1}\,\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ valable pour tout $n \geq 3$.

2.1 Expliquer pourquoi $u_n \geq 0$ pour tout n entier avec $n \geq 2$.

Soit $n \geq 2$. On a $\cos a \geq 0$ lorsque $a \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Comme $\frac{\pi}{2^k} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pour tout $k \in \{2, \cdots, n\}$, u_n est le produit de $n-1$ nombres positifs. Le nombre u_n est donc positif.

2.2 Prouver que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

En utilisant la relation indiquée, on obtient :

$u_{n-1} - u_n \;=\; \left(1 - \cos\frac{\pi}{2^n}\right)\, u_{n-1}$

qui est positif comme produit de deux nombres positifs.

2.3 En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

La suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 0*. Donc (cours), elle converge vers une limite finie $l \geq 0$.*

2.4 Pour n entier avec $n \geq 2$, on pose $v_n \;=\; u_n\;\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. En utilisant la relation trigonométrique $\sin(2\,a) = 2\,\sin a\,\cos a$, établir la relation de récurrence $v_n = \frac{1}{2}\,v_{n-1}$ valable pour tout $n \geq 3$.

$$v_n = u_n\;\sin\left(\tfrac{\pi}{2^n}\right) = u_{n-1}\;\sin\left(\tfrac{\pi}{2^n}\right)\;\cos\left(\tfrac{\pi}{2^n}\right) = u_{n-1}\;\tfrac{1}{2}\;\sin\left(2\;\tfrac{\pi}{2^n}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\;u_{n-1}\;\sin\left(\tfrac{\pi}{2^{n-1}}\right) = \tfrac{1}{2}\;v_{n-1}\,.$$

2.5 Calculer v_2 puis v_n.

$$v_2 = u_2\;\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\;\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\,.$$
$$v_n = \tfrac{1}{2^{n-2}}\;v_2 = \tfrac{1}{2^{n-1}}\,.$$