Université Rennes I **Année 2006-2007**

Unité d'enseignement B02

Contrôle 3 - Durée : 30 minutes

Exercice 1.

1.1 Trouver $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ de sorte que :

$$f(x) := \frac{x+1}{x\,(x-1)^2} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{(x-1)^2}, \qquad x \in]1, +\infty[\,.$$

$\alpha =$ $\beta =$ $\gamma =$.

1.2 Identifier toutes les fonction $F :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont primitives de f (remplir les "blancs" ci-dessous).

$$F(x) = \alpha \times \qquad + \beta \times \qquad - \gamma \times \qquad + C\,.$$

Exercice 2. On considère la fonction $g : [0, \frac{\pi}{4}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \sin t$. On admet que g est continue, dérivable et bijective. On rappelle que $g(0) = 0$ et $g(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. A l'aide du changement de variables $x = g(t)$, déterminer le nombre réel a ci-dessous :

$$\mathbb{R} \ni a := \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 - x^2}\, dx\,.$$

Indication. Utiliser la relation : $2 \cos^2 t = 1 + \cos 2\,t$.

Exercice 3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer le nombre réel b ci-dessous :

$\mathbb{R} \ni b := 3 \int_1^2 x^2 \ln x \, dx\,.$

Exercice 4. Donner la nature des séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ de termes généraux u_n suivants (on demande de justifier la réponse) :

4.1 $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$

4.2 $u_n = \frac{2\,n}{n+2^n}\,.$