Université Rennes I
Licence MIPE - Mathématiques
Deuxième semestre 2007

Module B02 - Suites et séries.

Deuxième contrôle continu - Durée : 30 minutes.

Lundi 12 mars de 13h15 à 13h45.

Questions de cours.

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée.

1.1. Donner la définition de ce qu'est la *borne supérieure* de A.

1.2. On considère le cas $A = \left\{1 - \frac{1}{n+1}\,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$. Déterminer la borne supérieure de cet ensemble A (on demande de justifier la réponse).

$\sup A =$

2. Répondre (sans justification) par OUI ou par NON aux affirmations suivantes (on demande de rayer la mention fausse) :

2.1. Toute suite croissante est convergente. **OUI** - **NON**.

2.2. La suite $(u_n)_n$ de terme général $u_n = n^3\,(1/\sqrt{3})^n$ tend vers $+\infty$.
OUI - **NON**.

Exercice. Pour n entier avec $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\ \cdots \cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)\ \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Noter la relation $u_n = u_{n-1}\ \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ valable pour tout $n \geq 3$.

2.1 Expliquer pourquoi $u_n \geq 0$ pour tout n entier avec $n \geq 2$.

2.2 Prouver que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

2.3 En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

2.4 Pour n entier avec $n \geq 2$, on pose $v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. On rappelle la relation trigonométrique :

$$\sin(2\,a) = 2\,\sin a\,\cos a\,, \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}\,.$$

Etablir (pour $n \geq 3$) la relation de récurrence $v_n = \frac{1}{2}\,v_{n-1}$.

2.5 Calculer v_2 puis v_n (pour $n \geq 2$).