

---

Contrôle continu (durée 30 mn)

Le 22/03/2019

---

Nom :

Prénom :

Groupe :

---

*Les documents ne sont pas autorisés*

*Dans le cas d'une réponse par OUI ou par NON, on demande d'entourer la bonne réponse ou de barrer la mauvaise réponse. Les mauvaises réponses seront pénalisées.*

**Exercice 1 (Formes quadratiques, réduction de Gauss)**

- (a) (1 pt) Soit  $q_{(a)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la forme quadratique définie par  $q_{(a)}(x, y) = 4xy$ . Décomposer  $q_{(a)}$  en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.

$$q_{(a)} =$$

- (b) (1 pt) Soit  $q_{(b)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la forme quadratique définie par  $q_{(b)}(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ . Décomposer  $q_{(b)}$  en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.

$$q_{(b)} =$$

- (c) ( $\frac{1}{2}$  pt) La forme bilinéaire symétrique associée à  $q_{(a)}$  est un produit scalaire.  
OUI - NON
- (d) ( $\frac{1}{2}$  pt) La forme bilinéaire symétrique associée à  $q_{(b)}$  est un produit scalaire.  
OUI - NON

**Exercice 2 (Forme bilinéaire, projections)**  $\mathbb{R}^3$  est muni du produit scalaire usuel.

- (a) (1 pt) On considère la projection orthogonale  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sur la droite engendrée par le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Donner la matrice  $A$  de  $p$  dans la base standard.

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- (b) (1 pt) Etant donnée la projection orthogonale  $p$  de (a), on considère la forme bilinéaire  $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par  $\phi(u, v) = \langle p(u), p(v) \rangle$  où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire habituel sur  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer le rang de  $\phi$ .

$$\text{rang}(\phi) =$$

- (c) (0,5 pt) Parmi tous les vecteurs  $\vec{x}$  de  $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ , trouver celui qui minimise la

$$\text{quantité } \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \vec{x} \right\|. \text{ Réponse : } \vec{x} =$$

- (d) (0,5 pt) Toute famille orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  est libre. OUI - NON

**Exercice 3 (Gram-Schmidt, projection)** On se place dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire usuel. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  engendré par les vecteurs  $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) (2 pts) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$  pour trouver une base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  orthonormée de  $F$  :

$$\vec{e}_1 =$$

$$\vec{e}_2 =$$

- (b) (1 pt) Soit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ . Indiquer une formule permettant de déterminer le projeté orthogonal  $\pi_F(\vec{u})$  de  $\vec{u}$  sur  $F$ .

$$\pi_F(\vec{u}) =$$

**Exercice 4 (Orthogonalité dans un espace de polynômes)** On se place dans l'espace  $E = \mathbb{R}_1[X]$  formé des polynômes de degré  $\leq 1$  et muni du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x) dx$$

- (a) (1 pt) Soit  $\mathbf{1}$  la fonction constante qui prend la valeur 1 partout. Calculer  $\|\mathbf{1}\|$  où  $\|\cdot\|$  désigne la norme induite par le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

$$\|\mathbf{1}\| =$$

- (b) (1pt) Déterminer un polynôme de la forme  $2X + a$  (avec  $a \in \mathbb{R}$ ) orthogonal à  $\mathbf{1}$ .

$$a =$$

- (c) (1pt) Déterminer une base orthonormée de  $\mathbb{R}_1[X]$ .