
Devoir à la maison
à rendre au plus tard le 30/03/2020

Nom :

Prénom :

Exercice 1 (changement de bases).

Soit ϕ la forme bilinéaire dont la matrice par rapport à la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Soit la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Déterminer la matrice de ϕ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Réponse : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$. Pour trouver la matrice recherchée, une première méthode consiste à calculer ses coefficients $a_{ij} := \phi(f_i, f_j)$. Par exemple, on trouve :

$$a_{11} = \phi\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (-2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.$$

On fait de même avec

$$a_{12} = a_{21} = \phi\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0, \quad \phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1.$$

Une seconde méthode (en fait équivalente) consiste à utiliser la formule (vue en cours) qui implique la matrice de passage, à savoir :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (encore un changement de bases).

On considère la forme quadratique $q(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$. On pose $x' = y$ et $y' = -x + 2y$. Que devient la forme quadratique q exprimée en terme de (x', y') ?

Réponse : $q(x', y') = -3x'^2 + y'^2$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$
$$q(x', y') = (2x' - y')^2 - 4(2x' - y')x' + (x')^2 = -3x'^2 + y'^2.$$
$$\phi(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_1 - u_1 v_2 - u_2 v_1 + u_1 v_3 + u_3 v_1$$

Réponse : $q(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 - 2u_1u_2 + 2u_1u_3$.

Réponse : $q(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2 + u_3)^2 - (u_2 - u_3)^2$.

Réponse : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, par exemple.

Réponse : $q(x, y, z) = 2(x - y)^2 - (y + z)^2 + 4z^2$

Réponse : $\text{rang}(q) = 3$ $\text{signature}(q) = (2, 1)$

Réponse : $(x, y, z) = (1, 1, 1)$

Exercice 5 (un exemple plus abstrait d'une forme bilinéaire).

On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. Sur cet espace on définit une forme bilinéaire ϕ par

$$\phi(P, Q) = P(2) \times Q(2).$$

Par exemple, pour $P = X^2 - 1$ et $Q = -X + 5$ on obtient $\phi(P, Q) = (2^2 - 1) \cdot (-2 + 5) = 9$. Dans ce qui suit, justifiez très brièvement vos réponses.

5.1. La forme ϕ est-elle symétrique ?

Réponse : **Oui**

5.2. La forme ϕ est-elle positive ?

Réponse : **oui** car $\phi(P, P) = P(2)^2 \geq 0$ pour tout polynôme P

5.3. La forme ϕ est-elle non-dégénérée ?

Réponse : **non** : par exemple pour $P(X) = X - 2$ on a $\phi(P, Q) = 0$ pour tout Q

5.4. La forme ϕ est-elle un produit scalaire ?

Réponse : **non**, puisqu'elle est dégénérée.

Par exemple pour $P(X) = X - 2 \neq 0$ on a $\phi(P, P) = 0$.

Exercice 6 (Méthode de Gram-Schmidt).

On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire ϕ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

On considère la base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ avec $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Utiliser la méthode de Gram-Schmidt pour transformer la base $\mathcal{B}$ en une base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ qui est *orthonormée pour le produit scalaire induit par ϕ* .

$$\text{Réponse : } v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Attention ici à ne pas utiliser le produit scalaire usuel, associé à la base canonique !

On rappelle que :

$$\phi((x, y), (x', y')) = (x, y) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' - xy' - x'y + 5yy'.$$

Pour obtenir $\vec{v}_1$, on normalise $\vec{b}_1$ selon ϕ ce qui donne

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\sqrt{\phi(\vec{b}_1, \vec{b}_1)}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir $\vec{v}_2$, on commence par projeter $\vec{b}_2$ sur l'orthogonal de $\vec{v}_1$ (au sens de ϕ) suivant la formule :

$$\vec{c}_2 := \vec{b}_2 - \phi(\vec{b}_2, \vec{v}_1) \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puis on normalise $\vec{c}_2$ pour récupérer :

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{c}_2}{\sqrt{\phi(\vec{c}_2, \vec{c}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$