UNIVERSITÉ RENNES 2

Algèbre IV pour MIASHS - CC2

Corrigé du contrôle continu (durée 30 mn)

Le 22/03/2019

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Les documents ne sont pas autorisés

Dans le cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse ou de barrer la mauvaise réponse. Les mauvaises réponses seront pénalisées.*

Exercice 1 (Formes quadratiques, réduction de Gauss)

(a) (1 pt) Soit $q_{(a)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q_{(a)}(x, y) = 4xy$. Décomposer $q_{(a)}$ en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.

$q_{(a)} = (x + y)^2 - (x - y)^2$

(b) (1 pt) Soit $q_{(b)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q_{(b)}(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$. Décomposer $q_{(b)}$ en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.

$q_{(b)} = (x - y)^2 + 2y^2$

(c) ($\frac{1}{2}$ pt) La forme bilinéaire symétrique associée à $q_{(a)}$ est un produit scalaire.

NON

(d) ($\frac{1}{2}$ pt) La forme bilinéaire symétrique associée à $q_{(b)}$ est un produit scalaire.

OUI

Exercice 2 (Forme bilinéaire, projections)

(a) (1 pt) On considère la projection orthogonale $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sur la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donner la matrice A de p dans la base standard.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) (1 pt) Etant donnée la projection orthogonale p de (a), on considère la forme bilinéaire $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $\phi(u,v) = \langle p(u), p(v) \rangle$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire habituel sur $\mathbb{R}^3$. Déterminer le rang de ϕ.

rang$(\phi) = 1$

(c) (0,5 pt) Parmi tous les vecteurs $\vec{x}$ de Vect$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$, trouver celui qui minimise la quantité $\left\|\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} - \vec{x}\right\|$. Réponse : $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$

(d) (0,5 pt) Toute famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$ est libre. OUI

Exercice 3 (Gram-Schmidt, projection) On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\vec{f_1} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{f_2} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

(a) (2 pts) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base $(\vec{f_1}, \vec{f_2})$ pour trouver une base $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2)$ orthonormée de F :

$\vec{\epsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{\epsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

(b) (1 pt) Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. Indiquer une formule permettant de déterminer le projeté orthogonal $\pi_F(\vec{u})$ de $\vec{u}$ sur F.

$\pi_F(\vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{u}, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2$

Exercice 4 (Orthogonalité dans un espace de polynômes) On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}_1[X]$ formé des polynômes de degré $\leqslant 1$ et muni du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\, dx$$

(a) (1 pt) Soit $\mathbf{1}$ la fonction constante qui prend la valeur 1 partout. Calculer $\|\mathbf{1}\|$ où $\|.\|$ désigne la norme induite par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

$\|\mathbf{1}\| = 1$

(b) (1pt) Déterminer un polynôme de la forme $2X + a$ (avec $a \in \mathbb{R}$) orthogonal à $\mathbf{1}$.

$a = -1$

(c) (1pt) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

$$1 \quad \text{et} \quad \sqrt{3}(2x-1)$$