
Devoir à la maison à rendre
au plus tard pour le 31/03/2020

Nom :

Prénom :

Exercice 1 (changement de bases).

Soit ϕ la forme bilinéaire dont la matrice par rapport à la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Soit la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Déterminer la matrice M de ϕ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

$M =$

Exercice 2 (encore un changement de bases).

On considère la forme quadratique $q(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$. On pose $x' = y$ et $y' = -x + 2y$. Que devient la forme quadratique q exprimée en terme de (x', y') ?

$q(x', y') =$

Exercice 3 (Est-ce un produit scalaire ?).

Dans $\mathbb{R}^3$, on regarde la forme bilinéaire suivante

$$\phi(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_1v_3 + u_3v_1$$

3.1. Déterminer la forme quadratique q associée ϕ .

$q(\vec{u}) =$

3.2. Décomposer cette forme quadratique q selon l'algorithme de Gauss.

$q(\vec{u}) =$

3.3. Trouver un vecteur $\vec{u}$ avec $\vec{u} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tel que $\phi(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ pour tout vecteur $\vec{v}$.

$\vec{u} =$

Exercice 4 (rang et signature d'une forme quadratique).

Dans $\mathbb{R}^3$ on définit une forme quadratique par $q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 4xy - 2yz$.

1.1. Décomposer cette forme quadratique selon l'algorithme de Gauss.

$$q(\vec{u}) =$$

1.2. Déterminez le rang rg et la signature sgn de cette forme quadratique q :

$$rg(q) = \quad \quad \quad sgn(q) =$$

1.2. Déterminez $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ et tel que $q(x, y, z) = 0$.

$$(x, y, z) =$$

Exercice 5 (un exemple plus abstrait d'une forme bilinéaire).

On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. Sur cet espace on définit une forme bilinéaire ϕ par $\phi(P, Q) = P(2) \times Q(2)$. Par exemple, pour $P = X^2 - 1$ et $Q = -X + 5$ on obtient $\phi(P, Q) = (2^2 - 1) \cdot (-2 + 5) = 9$. Dans ce qui suit, entourez la bonne réponse puis la justifier très brièvement.

5.1. La forme ϕ est-elle symétrique ? OUI — NON

5.2. La forme ϕ est-elle positive ? OUI — NON

5.3. La forme ϕ est-elle non-dégénérée ? OUI — NON

5.4. La forme ϕ est-elle un produit scalaire ? OUI — NON

Exercice 6 (Méthode de Gram-Schmidt).

On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire ϕ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

On considère la base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ avec $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Utiliser la méthode de Gram-Schmidt pour transformer la base $\mathcal{B}$ en une base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ qui est *orthonormée pour le produit scalaire induit par ϕ* (donner ci-dessous la réponse sans justification).

$$\vec{v}_1 = \quad \quad \quad \vec{v}_2 =$$