UNIVERSITÉ RENNES 2

Algèbre IV pour MIASHS - CC1

Corrigé du contrôle continu

le L6/02/2019

Les documents ne sont pas autorisés

Dans le cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse ou de barrer la mauvaise réponse. Vous aurez* $-0,5$ *points par réponse erronée.*

Exercice 1 (Méthode des moindres carrés)

- (1 pt) Dans la méthode des moindres carrés, la "somme des carrés des distances verticales" entre les points $(0,0)$, $(1,2)$ et $(3,3)$ et la droite $y = x + 1$ vaut 2.

  OUI

  La distance verticale d'un point de coordonnées (α, β) *à la droite d'équation* $y = ax + b$ *est donnée par* $|\beta - a\alpha - b|$. *Ainsi, la somme des carrés des distances verticales dont il est question vaut*

$$|0 - 0 - 1|^2 + |2 - 1 - 1|^2 + |3 - 3 - 1|^2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2.$$

- (1 pt) Dans la méthode des moindres carrés, la droite optimale pour les trois points $(0,0)$, $(1,2)$ et $(3,3)$ est la droite $y = -x + 3$.

  NON

  On trouve ici

$$|0 - 0 - 3|^2 + |2 + 1 - 3|^2 + |3 + 3 - 3|^2 = 3^2 + 0^2 + 3^2 = 18.$$

  Comme $2 < 18$, *le choix de la droite* $y = -x + 3$ *est moins optimal que ne l'est le choix de la droite* $y = x + 1$.

Exercice 2 (Distances, normes)

- (0.5 pt) Soit E un espace vectoriel. Etant donnés $\vec{x} \in E$ et $\vec{y} \in E$, on pose

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \vec{x} = \vec{y}, \\ 2 & \text{si} \quad \vec{x} \neq \vec{y}. \end{cases}$$

  Alors d est une distance.

  NON

  Par définition, on a $d(\vec{0}, \vec{0}) = 1 \neq 0$, *contredisant le premier axiome des distances.*

- (0.5 pt) La distance sur $\mathbb{R}$

$$d(x,y) = \sqrt{|y-x|}$$

  est induite par une norme.

  NON

  Supposons connue une norme $\| \cdot \|$ *telle que* $d(x,y) = \| y-x \|$*. Alors*

$$\forall \lambda > 0, \qquad d(\lambda x, \lambda y) = \| \lambda y - \lambda x \| = \lambda \| y-x \| = \lambda d(x,y).$$

  Or, pour $(x,y) = (0,1)$ *et* $\lambda = 2$*, on trouve ici* $d(0,2) = \sqrt{2} \neq 2d(0,1) = 2$*.*

- (0.5 pt) $N : \binom{x}{y} \mapsto |2x+3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

  NON

  Car $N\binom{-3}{2} = 0$ *sans que* $\binom{-3}{2} = \binom{0}{0}$*.*

- (0.5 pt) Pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ on a : $||\vec{x}||_\infty \leqslant ||\vec{x}||_2$.

  OUI

  Soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*. Il existe un indice* j *tel que* $|x_j| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| = ||\vec{x}||_\infty$*.*
  Le résultat vient alors de ce que

$$|x_j| = \sqrt{x_j^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2} = ||\vec{x}||_2.$$

Exercice 3 (Produit scalaire standard)

- (0.5 pt) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ tels que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$ alors $\vec{u} = \vec{v}$.

  NON

  Pas nécessairement. Soit $\vec{u} \neq \vec{0}$*. Prendre* $\vec{v} = 2\vec{u} \neq \vec{u}$*.*

- (0.5 pt) On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifiant $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 3$ et $\langle \vec{u} \ , \ \vec{v} \rangle = 2$. Alors on a : $\langle \ \vec{u} - 2\,\vec{v} \ , \ \vec{u} \ \rangle = 0$.

  OUI

  En effet

$$\langle \ \vec{u} - 2\,\vec{v} \ , \ \vec{u} \ \rangle = \| \ \vec{u} \ \|^2 - 2 \langle \ \vec{v} \ , \ \vec{u} \ \rangle = 2^2 - 2 \times 2 = 0.$$

- (0.5 pt) On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifiant $||\vec{u}+\vec{v}|| = ||\vec{u}-\vec{v}||$. Alors le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$.

  OUI

  En effet, en élevant au carré, on trouve

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2 \langle \ \vec{v} \ , \ \vec{u} \ \rangle + ||\vec{v}||^2,$$

$$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2 \langle \ \vec{v} \ , \ \vec{u} \ \rangle + ||\vec{v}||^2.$$

  Puisque ces deux quantités sont égales, on doit avoir $\langle \ \vec{v} \ , \ \vec{u} \ \rangle = 0$*.*

- (0.5 pt) Soient $\vec{x} = \binom{4}{3}$ et $\vec{y} = \binom{1}{-1}$, et α l'angle entre les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Alors $\cos(\alpha) = \frac{1}{5\sqrt{2}}$

  OUI

  En effet, on a

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle\ \vec{x}\ ,\ \vec{y}\ \rangle}{||\vec{x}||\,||\vec{y}||} = \frac{4-3}{\sqrt{4^2+3^2}\,\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{25}\,\sqrt{2}}.$$

Exercice 4 (Formes bilinéaires, changement de base) On rappelle qu'un *produit scalaire* est une forme bilinéaire qui est symétrique et définie positive.

- (1 pt) Soit ψ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^2$, et soit $\mathcal{B}$ la base $(\binom{3}{4}, \binom{1}{-1})$ de $\mathbb{R}^2$. Alors la matrice de ψ par rapport à $\mathcal{B}$ est

$$\Psi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 25 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

  OUI

  Notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, la matrice de ψ par rapport à $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} \psi(e_1,e_1) & \psi(e_1,e_2) \\ \psi(e_2,e_1) & \psi(e_2,e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 3 + 4\times 4 & 3\times 1 - 4\times 1 \\ 3\times 1 - 4\times 1 & 1\times 1 + 1\times 1 \end{pmatrix}.$$

- (1 pt) La forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$

$$\phi(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_1 - 2u_2v_2$$

  est un produit scalaire.

  NON

  Une telle ϕ n'est pas définie positive. En effet, pour $\vec{u} = \vec{v} = (\sqrt{2}, 1) \neq (0,0)$ on récupère

$$\phi(\vec{u}, \vec{u}) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} - 2 \times 1 \times 1 = 0.$$

- (1 pt) La forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$

$$\phi(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_1 + 3u_2v_2$$

  est un produit scalaire.

  NON

  Une telle ϕ n'est pas symétrique. Par exemple, pour $\vec{u} = (1,0)$ et $\vec{v} = (0,2)$, on trouve

  $\phi(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \times 0 + 1 \times 2 + 2 \times 0 \times 0 + 3 \times 0 \times 2 = 2,$

tandis que

$\phi(\vec{v}, \vec{u}) = 0 \times 1 + 0 \times 0 + 2 \times 2 \times 1 + 3 \times 2 \times 0 = 4.$

Clairement $\phi(\vec{u}, \vec{v}) \neq \phi(\vec{v}, \vec{u})$.

- (1 pt) La forme quadratique q associée à une forme bilinéaire symétrique ϕ est $q(\vec{v}) = \sqrt{\phi(\vec{v}, \vec{v})}$
  NON
  La bonne formule est $q(\vec{v}) = \phi(\vec{v}, \vec{v})$. *Par exemple, la forme quadratique* q *associée au produit scalaire usuel est* $q(\vec{v}) = \| \vec{v} \|^2$ *et non pas* $q(\vec{v}) = \| \vec{v} \|$.

Question bonus (1 pt) On travaille dans le plan. On fixe deux points A et B distincts. Déssiner ci-dessous le lieu géométrique de l'ensemble des points M vérifiant $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

C'est le cercle centré au milieu I *du segment* $[A, B]$ *et ayant pour rayon* $R := \| AB \| /2$. *En effet, puisque* $\vec{IA} = -\vec{IB}$, *on a :*

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) = \| MI \|^2 - R^2.$$