UNIVERSITÉ RENNES 2

Algèbre IV pour MIASHS - CC1

Contrôle continu (durée 30 mn)

Le 16/02/2019

Nom : **Prénom :**

Dans le cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse ou de barrer la mauvaise réponse. Une bonne réponse donne les points indiqués au barème. Une absence de réponse est neutralisée. Les mauvaises réponses sont pénalisées. La consultation de documents, calculettes, portables ... peut être sanctionnée.*

Exercice 1 (Méthode des moindres carrés)

- (1 pt) Dans la méthode des moindres carrés, la "somme des carrés des distances verticales" des points $(0,0)$, $(1,2)$ et $(3,3)$ à la droite $y = x + 1$ vaut 2.

  OUI - NON

- (1 pt) Dans la méthode des moindres carrés, la droite optimale pour le choix des trois points $(0,0)$, $(1,2)$ et $(3,3)$ est la droite $y = -x + 3$.

  OUI - NON

Exercice 2 (Distances, normes)

- (0.5 pt) Soit E un espace vectoriel. Etant donnés $\vec{x} \in E$ et $\vec{y} \in E$, on pose

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \vec{x} = \vec{y}, \\ 2 & \text{si} \quad \vec{x} \neq \vec{y}. \end{cases}$$

  Alors d est une distance. OUI - NON

- (0.5 pt) La distance sur $\mathbb{R}$ définie par

$$d(x, y) = \sqrt{|y - x|}$$

  est induite par une norme. OUI - NON

- (0.5 pt) $N : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto |2x + 3y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. OUI - NON

- (0.5 pt) Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ on a : $||\vec{x}||_\infty \leqslant ||\vec{x}||_2$. OUI - NON

$\Longrightarrow$ T. S. V. P.

Exercice 3 (Produit scalaire standard)

- (0.5 pt) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$. Alors on a $\vec{u} = \vec{v}$.

  OUI - NON

- (0.5 pt) On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifiant $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 3$ et $\langle \vec{u}\ ,\ \vec{v} \rangle = 2$. Alors on a : $\langle\ \vec{u} - 2\,\vec{v}\ ,\ \vec{u}\ \rangle = 0$.

  OUI - NON

- (0.5 pt) On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifiant $||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\vec{u} - \vec{v}||$. Alors le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$.

  OUI - NON

- (0.5 pt) On pose $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Soit α l'angle entre les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Alors : $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}$.

  OUI - NON

Exercice 4 (Formes bilinéaires) On rappelle qu'un *produit scalaire* est une forme bilinéaire qui est symétrique et définie positive.

- (1 pt) Soit ψ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^2$, et soit $\mathcal{B}$ la base $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^2$. Alors la matrice de ψ par rapport à $\mathcal{B}$ est

  $$\Psi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 25 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$ OUI - NON

- (1 pt) La forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\phi(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_1 - 2 u_2 v_2$ est un produit scalaire.

  OUI - NON

- (1 pt) La forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\phi(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_1 + u_1 v_2 + 2 u_2 v_1 + 3 u_2 v_2$ est un produit scalaire.

  OUI - NON

- (1 pt) La forme quadratique q associée à une forme bilinéaire symétrique ϕ est donnée par $q(\vec{v}) = \sqrt{\phi(\vec{v}, \vec{v})}$

  OUI - NON

Question bonus (1 pt) On travaille dans le plan. On fixe deux points A et B distincts. Dessiner ci-dessous le lieu géométrique de l'ensemble des points M vérifiant $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

A •   •B