UNIVERSITÉ
RENNES 2

**Algèbre IV pour MIASHS - CC1**

---

Corrigé du controle continu du 14/02/2020

---

*Les documents ne sont pas autorisés*

**Exercice 1 (Sur les moindres carrés).**

**1.1**. Calculez les distances verticales des points de coordonnées $(-1,-1)$ et $(0,1)$ à la droite $D$ d'équation $y = x - 1$.

$d((-1,-1), D) = 1$ $\qquad\qquad$ $d((0,1), D) = 2.$

**1.2**. Calculez la somme $S(D)$ des carrés des distances verticales des points de coordonnées $(-1,-1)$, $(0,1)$ et $(1,0)$ à la droite $D$.

$S(D) = 5$

**1.3**. La droite $D$ est-elle optimale pour minimiser la valeur de $S(D)$ ? Répondre par OUI ou par NON, et justifier la réponse.

NON car pour la droite $\tilde{D}$ d'équation $y = 0$, on obtient $S(\tilde{D}) = 2 < 5$.

**Exercice 2 (Sur les formes bilinéaires).** On considère la fonction $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $S(a,b) = a^2 + 2ab + 2b^2 + 2a$.

**2.1**. La fonction $S(\cdot)$ peut se mettre sous la forme $S(a,b) = (a+b+c_1)^2 + (b+c_2)^2 + c_3$ où les $c_i$ sont des constantes. Identifier les valeurs des coefficients $c_1$ et $c_2$.

$c_1 = 1$ $\qquad\qquad$ $c_2 = -1$

**2.2**. Déterminer ce que vaut :

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} S(a,b) = c_3 = -2$$

**2.3**. Pour quelles valeurs $a_m$ et $b_m$ de $a$ et de $b$ ce minimum est-il atteint ?

$a_m = -2$ $\qquad\qquad$ $b_m = 1$

**Exercice 3**. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. On note $\|.\|_2$ la norme Euclidienne.

**3.1 (Question de cours)**. On se donne deux vecteurs :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Que dit l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans cette situation ?

$$|x \cdot y| = |x_1 y_1 + x_2 y_2| \leq \|x\|_2 \ \|y\|_2$$

**3.2 (Normes)**. On demande ici de calculer la norme du vecteur $\binom{+3}{-4}$ selon les différentes normes que sont $\|.\|_1$, $\|.\|_2$, et $\|.\|_\infty$.

$\|\binom{+3}{-4}\|_1 = 7$ $\qquad$ $\|\binom{+3}{-4}\|_2 = 5$ $\qquad$ $\|\binom{+3}{-4}\|_\infty = 4$

**3.3**. Les fonctions suivantes $\|x\|_\star$ définies sur $\mathbb{R}^2$ sont-elles des *normes* ? On demande d'entourez la bonne réponse sans justification.

(a) $\|x\|_{(a)} = \sqrt{x_2^2 + 4x_2^2}$. $\qquad$ NON car $\|\binom{1}{0}\|_{(a)} = 0$ alors que $\binom{1}{0} \neq 0$

(b) $\|x\|_{(b)} = |x_1| - \sqrt{|x_2|}$. $\qquad$ NON car $\|\binom{\lambda}{\lambda}\|_{(b)} \neq \lambda \|\binom{1}{1}\|_{(b)}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$