M2 Analyse et Applications
Analyse microlocale et théorie spectrale *

Cours de Dimitri Yafaev, tapé par Salim Rostam

Université Rennes 1, premier semestre 2014–2015

Table des matières

*Référence bibliographique : Birman and Solomyak, *Theory of self-adjoint operators in Hilbert spaces*

1 Rappels

1.1 Espaces de Hilbert

Définition 1.1. On dit que $\mathcal{H}$ est un *espace de Hilbert* s'il et linéaire [1] et muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$, c'est-à-dire une application $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ qui vérifie :
— linéarité à gauche ;
— symétrie hermitienne (donc semi-linéarité à droite) ;
— caractère défini positif.

Un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ étant donné, on considère la norme associée $\|\cdot\|$ donnée par $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$, qui vérifie :
— $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$;
— $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$;
— $\|u\| \geq 0$ et $[\|u\| = 0] \implies [u = 0]$.

Exercice 1.2. Trouver une CNS pour qu'une norme soit issue d'un produit scalaire. *Réponse : il faut et il suffit que la norme vérifie l'égalité du parallélogramme.*

Propriété 1.3 (inégalité de Cauchy–Schwarz)**.** $|(u,v)| \leq \|u\|\|v\|$

Définition 1.4. — On dit que $\mathcal{H}$ est *complet* si toute suite de Cauchy est convergente (dans $\mathcal{H}$).
— On dit que $\mathcal{H}$ est séparable s'il existe une partie dénombrable dense dans $\mathcal{H}$.

Exemple 1.5. Les espaces suivants sont complets :
— $\mathbb{C}^N$, muni du produit scalaire $(u,v) := \sum_{k=1}^{N} u^k \overline{v^k}$ (où $u = (u^1, \ldots, u^N)$;
— $\ell^2(\mathbb{N})$, muni du produit scalaire $(u,v) := \sum_{k=1}^{\infty} u^k \overline{v^k}$;
— $\mathrm{L}^2(\Omega)$ où $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, muni du produit scalaire $(u,v) := \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x$;

1. Comprendre : espace vectoriel.

— $\mathrm{H}^l(\Omega)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, défini par l'ensemble des $u \in \mathrm{L}^2(\Omega), \mathrm{D}^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ $\forall |\alpha| = l$ (note [2]) avec $\mathrm{D}_j := -i\frac{\partial}{\partial x_j}$ et la notations multi-indicielle. On munit cet espace du produit scalaire $(u, v) := (u, v)_{\mathrm{L}^2} + \sum_{|\alpha|=l} (\mathrm{D}^\alpha u, \mathrm{D}^\alpha v)_{\mathrm{L}^2}$.

2 Opérateurs fermés

Définition 2.1. A, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$. On dit que A est *fermé* si :

$$\forall (f_n) \in \mathcal{D}(A)^{\mathbb{N}}, [f_n \to f \text{ et } Af_n \to g] \implies [f \in \mathcal{D}(A) \text{ et } Af = g]$$

Théorème 2.2. *Supposons que A^{-1} existe. Alors A est fermé* ssi *A^{-1} est fermé.*

Démonstration. Soit $U : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ définie par $U(f, g) := (g, f)$. On a $\mathcal{G}(A^{-1}) = U\mathcal{G}(A)$ et comme U est une isométrie on a $\mathcal{G}(A)$ fermé ssi $\mathcal{G}(A^{-1})$ fermé. □

Théorème 2.3. *Si l'opérateur A est fermé alors $\mathcal{N}(A)$ est fermé.*

Démonstration. Soit $f_n \in \mathcal{N}(A)$ qui converge vers f. Or, $f_n \to f$ et $Af_n = 0$ donc comme A est fermé on a $f \in \mathcal{D}(A)$ et $Af = 0$ donc $f \in \mathcal{N}(A)$. □

Théorème 2.4 (Banach)**.** *Soit A fermé. On suppose de plus que $\mathcal{D}(A)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$; alors A est borné. En particulier, si $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ alors $A \in \mathcal{B}$.*

Remarque 2.5. Cela explique donc pourquoi l'on va s'intéresser au cas où $\mathcal{D}(A)$ est dense.

Corollaire 2.6. *A fermé, A^{-1} existe et $\mathcal{R}(A)$ fermé. Alors A^{-1} est borné.*

Démonstration. On a $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$; par un théorème précédent, A^{-1} est fermé donc $\mathcal{D}(A^{-1})$ est fermé et on utilise le théorème précédent. □

Théorème 2.7. *Si A est fermé et $\|Af\| \geq c\|f\|$ avec $c > 0$ $\forall f \in \mathcal{D}(A)$ alors $\mathcal{R}(A)$ est un sous-espace (fermé).*

Démonstration. $\|Af\| \geq c\|f\|$ donc A^{-1} existe et $\|A^{-1}g\| \leq \frac{1}{c}\|g\|$ $\forall g \in \mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$ donc A^{-1} est borné, donc fermé donc $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$ est fermé (avec $B = A^{-1}$, si $f_n \to f$ alors $Bf_n \to g$ (car de Cauchy car B borné) donc comme B est fermé on a $f \in \mathcal{D}(B)$ et $g = Bf$. □

Définition 2.8. Supposons que $\mathcal{G}(A)$ n'est pas fermé ; $\overline{\mathcal{G}(A)}$ l'est, mais est-ce le graphe d'un opérateur B ? On veut donc que $(x, y_1) = (x, y_2) \implies y_1 = y_2$ et $y_1 = Bx$. Cela est donc équivalent à $(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(A)} \iff y = 0$. Finalement, $\overline{\mathcal{G}(A)} = \mathcal{G}(B)$ et $B =: \overline{A}$ s'appelle l'*adhérence* de A.

Remarque 2.9. Que veut dire $(0, y) \in \overline{G}(A)$? C'est $(x_n, y_n) \to (0, y)$ avec $y_n = Ax_n$ (et $x_n \in \mathcal{D}(A)$. Si A admet une adhérence, on a donc $y_n = 0$; c'est en fait exactement la définition d'un opérateur qui admet une adhérence (donnée juste après celle d'un opérateur fermé).

Remarque 2.10. Soit $\widetilde{A}$ une extension fermée de A (en particulier, $\mathcal{G}(A) \subseteq \mathcal{G}(\widetilde{A})$. L'opérateur $\overline{A}$ est la plus petite extension fermée de A. En effet, $\mathcal{G}(\overline{A}) = \overline{\mathcal{G}(A)} \subseteq \mathcal{G}(\widetilde{A})$.

Tous les opérateurs « pas trop pathologiques » admettent une fermeture. On introduit l'adhérence pour distinguer l'extension la plus naturelle.

Exemple 2.11 (Retour sur un exemple précédent). Opérateur A défini sur $\mathcal{C}^1[0, 1] \subseteq \mathrm{L}^2(0, 1)$ par $Af = -if'$. Vérifier que A admet une adhérence et calculer $\overline{A}$.

2. C'est équivalent de mettre $|\alpha| \leq l$ si Ω est bien choisi.

3 Opérateurs adjoints

Rappelons que si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ alors il existe un unique opérateur borné A^* tel que $(Af, g) = (f, A^*g)$ $\forall f, g \in \mathcal{H}$. Que faire pour les opérateurs non bornés ? On suppose que A est défini sur $\mathcal{D}(A)$ qui est *dense* dans $\mathcal{H}$.

Définition 3.1. On dit que $g \in \mathcal{D}(A^*)$ si $\exists g_* \in \mathcal{H}, (Af, g) = (f, g_*)$ $\forall f \in \mathcal{D}(A)$. On définit alors $A^*g := g_*$.

Remarque 3.2. L'élément g^* est unique en vertu de la densité de $\mathcal{D}(A)$.

Propriété 3.3. *L'opérateur A^* est linéaire et fermé.*

Démonstration. La linéarité découle des propriétés du produit scalaire. Pour la fermeture, il suffit de vérifier que si $g_n \to g$ et si $A^*g_n \to h$ alors $g \in \mathcal{D}(A^*)$ et $A^*g = h$. D'après ces hypothèses et par continuité du produit scalaire, on a $\forall f \in \mathcal{D}(A), (Af, g) = (f, h)$. $\square$

Propriété 3.4. *Si $A \subseteq B$ alors $B^* \subseteq A^*$.*

Soit $W : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ l'isométrie définie par $W(f, g) := (-g, f)$.

Remarque 3.5. L'ensemble $(W\mathcal{G}(A))^\perp$ est un graphe : si $(0, h)$ y est alors $\forall f \in \mathcal{D}(A), (0, h) \perp (-Af, f)$ donc $(0, Af) + (h, f) = 0$ donc $h \in \mathcal{D}(A)^\perp = \{0\}$ car $\mathcal{D}(A)$ est dense.

On a en fait le théorème suivant.

Théorème 3.6. $(W\mathcal{G}(A))^\perp = \mathcal{G}(A^*)$.

Démonstration. On a $(g, h) \perp W\mathcal{G}(A)$ <u>ssi</u> $-(g, Af) + (h, f) = 0$ $\forall f \in \mathcal{D}(A)$ <u>ssi</u> $g \in \mathcal{D}(A^*)$ et $h = A^*g$! $\square$

Théorème 3.7. *Si $\overline{A}$ existe alors $\overline{A}^* = A^*$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que les graphes sont égaux. Or, $\mathcal{G}(A^*) = (W\mathcal{G}(A))^\perp = (W\overline{\mathcal{G}(A)})^\perp = (W\mathcal{G}(\overline{A}))^\perp = \mathcal{G}(\overline{A}^*)$. $\square$

Théorème 3.8. *On a la décomposition orthogonale $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{N}(A^*)$.*

Démonstration. $y \in \mathcal{N}(A^*)$. Alors $(Ax, y) = (x, A^*y) = 0$ donc $y \in \mathcal{D}(A)^\perp$.

Si y est orthogonal à $\overline{\mathcal{R}(A)}$ alors $(Ax, y) = 0$ $\forall x \in \mathcal{D}(A)$. Or, $(Ax, y) = (x, y_*)$ et $y_* = 0$ donc $y \in \mathcal{D}(A^*)$ et $A^*y = y_* = 0$. $\square$

Remarque 3.9. On a donc l'égalité traditionnelle $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$.

Théorème 3.10. *(On rappelle que $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $\mathcal{H}$). On a $\mathcal{D}(A^*)$ dense dans $\mathcal{H}$* <u>ssi</u> *$\overline{A}$ existe. Sous cette hypothèse, on a $(A^*)^* = \overline{A}$.*

Remarque 3.11. Ce théorème fournit donc un moyen de déterminer si A admet une adhérence, et si c'est le cas de déterminer cette adhérence.

Lemme 3.12. $(W\mathcal{G}(B))^\perp$ *est un graphe* $\iff \overline{\mathcal{D}(B)} = \mathcal{H}$.

Démonstration. Rappelons que la première condition est équivalente à $(0, h) \in (W\mathcal{G}(B))^\perp \implies h = 0$. $(x, Bx) \in \mathcal{G}(B)$ et donc $(-Bx, x) \in W\mathcal{G}(B)$. Ainsi, $(0, h) \perp (-Bx, x) \iff (h, x) = 0$, on conclut en remarquant que $[(h, x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(B) \implies h = 0] \iff \overline{\mathcal{D}(B)} = \mathcal{H}$. $\square$

Démonstration du théorème. On reconsidère $W(f,g) = (-g,f)$, qui vérifie $W^2 = -\operatorname{id}$ (dans $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$). On a $W\mathcal{G}(A^*) = W((W\mathcal{G}(A))^\perp)$. De manière générale, on a $W(M)^\perp = (WM)^\perp$ ($\forall M, \forall$ isométrie W). Ainsi, on obtient $W\mathcal{G}(A^*) = (W(W\mathcal{G}(A)))^\perp = (W^2\mathcal{G}(A))^\perp = \mathcal{G}(A)^\perp$. Ainsi, $\overline{\mathcal{G}(A)} = (W\mathcal{G}(A^*))^\perp$.

Posons $B := A^*$. $\overline{\mathcal{G}(A)} = (W\mathcal{G}(A^*))^\perp$ est un graphe $\iff$ $\overline{\mathcal{D}(A^*)} = \mathcal{H}$ par le lemme, et on a déjà vu que $\overline{\mathcal{G}(A)}$ est un graphe ssi A admet une adhérence.

Ainsi, l'opérateur A^* admet un adjoint $A^{**} := (A^*)^*$. On a $\mathcal{G}(A^{**}) = (W\mathcal{G}(A^*))^\perp = \mathcal{G}(\overline{A})$ (théorème 3.6), ce qui est bien sûr équivalent à $A^{**} = \overline{A}$. □

Exemple 3.13. Reconsidérer notre exemple $A := -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ dans $\mathrm{L}^2(0,1)$ avec $\mathcal{D}(A) = \mathcal{C}^1[0,1]$.

4 L'algèbre $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$

4.1 Définitions et première propriétés

Un opérateur A est dans $\mathcal{B}$ ssi $\|Af\| \le c\|f\|\ \forall f \in \mathcal{H}$. L'espace $\mathcal{B}$ est linéaire, stable par adjonction et par composition. Quels sont sont ses idéaux stables par adjonction (du coup forcément bilatères) ?

Théorème 4.1. *Si $\mathfrak{S}$ est un idéal alors $\mathfrak{S}_0 \subseteq \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}_\infty$ où $\mathfrak{S}_0$ est l'idéal des opérateurs de rang fini et $\mathfrak{S}_\infty$ est l'idéal des opérateurs compacts.*

On rappelle que $A \in \mathfrak{S}_0$ si $\dim \mathcal{R}(A) < \infty$, et que $A \in \mathfrak{S}_\infty$ est compact si pour toute partie M bornée la partie AM est relativement compacte.

Proposition 4.2. *L'opérateur A est compact* ssi $\forall f_n \xrightarrow{w} 0, Af_n \xrightarrow{s} 0$.

Démonstration. Supposons $f_n \xrightarrow{w} 0$ et supposons, quitte à extraire, que $\|Af_n\| \geqslant c > 0$. Or, (f_n) est bornée donc comme A est compact, quitte à extraire on peut supposer que $Af_n \xrightarrow{s} g$. Or, $Af_n \xrightarrow{w} 0$ (hé oui :-)) donc on a $g = 0$, en particulier $\|Af_n\| \to 0$ ce qui est absurde.

Considérons maintenant une suite (f_n) bornée. Ainsi, elle est faiblement compacte donc quitte à extraire on peut supposer qu'elle converge faiblement vers un élément f. Ainsi, par hypothèse on sait que $Af_n \xrightarrow{s} Af$; c'est gagné ! □

Théorème 4.3. *Si $A_n \in \mathfrak{S}_\infty$ et $\|A - A_n\| \to 0$ alors A est compact.*

Démonstration. Soit M une partie bornée (de norme $\le c$). Pour $f \in M, \|(A - A_n)f\| \le \|A - A_n\|\|f\|$; pour $\epsilon > 0$, on peut choisir n assez grand pour que $\|A - A_n\| \le \epsilon$. Ainsi, $\{A_nf\}$ est un ϵ-réseau compact pour Af donc est compact. (On peut aussi utiliser la précompacité.)

Autre démo. Soit $f_n \xrightarrow{w} 0$. On a $\|Af_n\| \le \|(A - A_m)f_n\| + \|A_mf_n\|$. On sait que $\forall \epsilon, \exists N, n \ge N \implies \|Af_n\| < \epsilon$. Choisissons m tel que $\|A - A_m\| < \epsilon$. Choisissons maintenant n tel que $\|A_mf_n\| < \epsilon$ (possible car A_m est compact). Ainsi, si $\|f_n\| \le c$ (elle est bornée car faiblement convergente) on obtient $\|An_f\| \le (c+1)\epsilon$. Ceci pour tout ϵ, donc on récupère bien la convergence. □

Remarque 4.4. En particulier, une limite uniforme d'opérateurs de rang fini est compacte et l'ensemble $\mathfrak{S}_\infty$ est fermé.

Remarque 4.5. Si la topologie est plus faible, l'adhérence est plus forte : l'adhérence de $\mathfrak{S}_0$ est $\mathcal{B}$ tout entier.

Propriété 4.6. *L'ensemble $\mathfrak{S}$ est stable par multiplication par des éléments de $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Montrons que si A est compact et B borné alors BA est compact. Si (f_n) converge faiblement vers 0 alors (Af_n) converge fortement vers 0 donc (BAf_n) aussi et c'est gagné. De plus, (Bf_n) converge aussi faiblement vers 0 et donc (ABf_n) converge faiblement. $\square$

Théorème 4.7. *Si A est compact alors A^* aussi.*

Démonstration. L'opérateur A est compact donc A^*A et AA^* aussi. Ainsi, si (f_n) converge faiblement vers 0 alors (AA^*f_n) converge fortement vers 0, donc en particulier $(AA^*f_n, f_n) = \|A^*f_n\|^2 \to 0$ *i.e.* (A^*f_n) converge faiblement vers 0. $\square$

4.2 Théorème spectral pour les opérateurs compacts autoadjoints

Soit A un opérateurs autoadjoint. Tout d'abord, remarquons que les valeurs propres (c'est-à-dire les $\lambda \in \mathbb{C}$ telles que $\exists \phi \neq 0, A\phi = \lambda\phi$) sont réelles, et des vecteurs propres associées à des valeurs propres différentes sont orthogonaux. Notons $-\lambda_1^- < -\lambda_2^- < \cdots \leqslant 0 \leqslant \cdots < \lambda_2^+ < \lambda_1^+$ les valeurs propres de A. Remarquons que l'espace propre associé à une valeurs propre non nulle est de dimension finie (raisonner par l'absurde et utiliser la transformation de la convergence faible en convergence forte).

On a également :

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^+(f, \phi_n^+)\phi_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^-(f, \phi_n^-)\phi_n^-$$

Remarque 4.8. En dimension finie, il existe une transformation U unitaire telle que $AU = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Si A est de plus positif, alors il reste seulement $Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^+(f, \phi_n^+)\phi_n^+$ et on peut définir $\phi(A)f := \sum_{n=1}^{\infty} \phi(\lambda_n^+)(f, \phi_n^+)\phi_n^+$, par exemple avec $\phi := \sqrt{}$. Ainsi, il existe $B \geq 0$ tel que $B^2 = A$; on note $B = \sqrt{A}$.

Remarque 4.9. En fait, la racine existe pour tout opérateur positif (non forcément compact) et on va même utiliser ce résultat tout de suite.

4.3 Décomposition polaire

Soit $A \in \mathcal{B}$. L'opérateur A^*A est autoadjoint positif : on peut donc considérer $|A| := \sqrt{A^*A}$, qui est autoadjoint. De plus, $\|Af\|^2 = (A^*Af, f) = (|A|^2 f, f) = \||A|f\|^2$ donc on obtient :

$$\|Af\| = \||A|f\|$$

En particulier, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(|A|)$. Or, $\overline{\mathcal{R}(A^*)} \oplus \mathcal{N}(A) = \mathcal{H}$ donc (par orthogonalité) on a $\overline{\mathcal{R}(A^*)} = \overline{\mathcal{R}(|A|)}$.

Théorème 4.10. *Il existe $W : \overline{\mathcal{R}(A^*)} \to \overline{\mathcal{R}(A)}$ isométrie bijective telle que $A = W|A|$ (on prolonge W à tout l'espace par $W|_{\mathcal{N}(A)} = 0$).*

Remarque 4.11. L'opérateur W joue le rôle du $e^{i\theta}$ dans $z = e^{i\theta}|z|$. C'est donc l'analogue de la décomposition polaire !

Démonstration. (Construction). Si $f \in \mathcal{R}(|A|)$ alors il existe x tel que $f = |A|x$. On définit alors W par $Wf := Ax$ (bien définie car $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(|A|)$. On a donc $W : \mathcal{R}(|A|) \to \mathcal{R}(A)$ et $\|Wf\| = \|Ax\| = \||A|x\| = \|f\|$ donc W est une isométrie, qui est bien surjective par construction. Finalement, on a $Ax = Wf = W|A|x$ et c'est gagné ! On conclut par le théorème de prolongement des isométries. □

4.4 Comparaison des deux sections précédentes

Soit A compact. On a $|A|\phi_n = \lambda_n(|A|)\phi_n$ (cf. décomposition de l'opérateur autoadjoint $|A|$).

Définition 4.12. $s_n(A) := \lambda_n(|A|) = \sqrt{\lambda_n(A^*A)}$ sont les *valeurs singulières* de A.

On a $Af = W|A|f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(|A|)(f, \phi_n)W\phi_n$; notons $\psi_n := W\phi_n$. Alors on obtient (c'est la *représentation de Schmidt*) :

$$Af = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(A)(f, \phi_n)\psi_n$$

.

Remarque 4.13. L'opérateur A n'est pas *a priori* autoadjoint !

On peut appliquer ce résultat aux résultats suivants.

Fermeture des opérateurs de rang fini.

Théorème 4.14. *Si $A \in \mathfrak{S}_\infty$ alors il existe des $A_n \in \mathfrak{S}_0$ qui convergent uniformément vers A. Autrement dit, l'adhérence des opérateurs de rang fini est l'ensemble des opérateurs compacts.*

Démonstration. On reprend les notations précédentes. Notons :

$$A_N f := \sum_{n=0}^{N} s_n(A)(f, \phi_n)\psi_n$$

On a $\|(A - A_N)f\|^2 = \|\sum_{n>N} s_n(f, \phi_n)\psi_n\|^2$ donc par le théorème de Pythagore on obtient $\sum_{n>N} s_n^2|(f, \phi_n)|^2 \leq s_{N+1}^2 \sum_{n>N} |(f, \phi_n)|^2 \leq s_{N+1}^2\|f\|^2$ et en conclut car les valeurs singulières convergent vers 0. □

Expression de l'adjoint. On a :

$$A^*g = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(A)(g, \psi_n)\phi_n$$

En effet, $(Af, g) = \sum s_n(f, \phi_n)(\psi_n, g) = (f, A^*g)$ et c'est bon :-)

Remarque 4.15. On trouve donc l'adjoint en « inversant » W, comme c'est le cas pour les complexes.

De part cette formule pour A^*, on a donc $A^*\phi_m = s_m\phi_m$, donc $AA^*\phi_m = s_m^2\psi_m$. Rappelons que par définition, on avait $A^*A\phi_n = s_n^2\phi_n$. Ainsi, on a le théorème suivant :

Théorème 4.16. *AA^* et A^*A possèdent les mêmes valeurs propres.*

4.5 Propriétés des valeurs singulières

Soit A compact. Ses valeurs singulières sont les valeurs propres de $|A| = \sqrt{A^*A}$, ou encore les racines carrés des valeurs propres de A^*A. La suite (s_n) décroit, est positive et converge vers 0.

Théorème 4.17. *On a $s_1(A) = \|A\|$.*

Démonstration. On a $Af = \sum s_n(f,\phi_n)\psi_n$ donc $\|Af\|^2 = \sum s_n^2|(f,\phi_n)|^2 \leq s_1^2 \sum |(f,\phi_n)|^2 \leq s_1^2\|f\|^2$ donc $\|A\| \leq s_1$. En considérant $A\phi_1 = s_1\psi_1$ on obtient $\|A\phi_1\| = s_1$ donc c'est gagné :) □

Théorème 4.18. *On a $s_n(A) = s_n(A^*)$.*

Démonstration. Les valeurs propres non nulles de AA^* et de A^*A sont les mêmes (déjà vu). □

Remarque 4.19. On écrit $A = \sum_{n\leq 0} s_n(\cdot,\phi_n)\psi_n$.

4.6 Principe du min-max

Définition 4.20. Si L est une partie de $\mathcal{H}$, son *défaut* est défini par $\mathrm{Def}(L) := L^\perp$.

Théorème 4.21 (Principe du min-max)**.** *Soit A un opérateur compact autoadjoint. Alors :*

$$\lambda_{n+1}^\pm(A) = \min_{\substack{L \\ \dim(\mathrm{Def}(L))\leq n}} \max_{\substack{f\in L \\ \|f\|=1}} \pm(Af,f)$$

Démonstration. (On démontre dans le cas +.) On écrit $A = \sum \lambda_n^+(\cdot,\phi_n^+)\phi_n^+ - \sum \lambda_n^-(\cdot,\phi_n^-)\phi_n^-$.

Notons $L_n := \mathrm{vect}(\phi_1^+,\dots,\phi_n^+)$. Pour $f \in L_n$, on a

$$(Af,f) = \sum_{m=1}^n \lambda_m^+|(f,\phi_m)^+|^2 \geq \lambda_n^+ \sum_{m=1}^n |(f,\phi_m)^+|^2 = \lambda_n^+\|f\|^2$$

donc le max est plus grand (on prend $L := L_n^\perp$, et donc on a $\mathrm{Def}(L) = L_n$ et $\dim \mathrm{Def}(L) \leq n$).

De plus, si $f \in L_n^\perp$ on a $(Af,f) \leq \sum_{m\leq n+1} \lambda_{m+1}^+|(f,\phi_m^+)|^2 \leq \lambda_{n+1}^+|(f,\phi_m^+)|^2 \leq \lambda_{n+1}^+\|f\|^2$. Finalement, on a bien λ_{n+1}^+ qui est supérieur ou égal au minmax.

Supposons que l'inégalité est stricte. Il existe donc L avec $\dim \mathrm{Def}(L) \leq n$ tel que $\lambda_{n+1}^+ > \max_{f\in L, \|f\|=1}(Af,f)$. En prenant $f \in L_{n+1} \cap L$ (on a $\dim L_{n+1} = n+1$ et $\dim L^\perp \leq n$) on a donc $(Af,f) \leq \lambda_{n+1}$ par la première inégalité de cette démonstration. C'est une contradiction avec $\lambda_{n+1}^+ > \max$. □

Soit maintenant T compact (par forcément autoadjoint) et $A := T^*T$. On obtient donc [3] :

$$s_n^2(T) = \lambda_{n+1}(T^*T) = \min_{\substack{L \\ \mathrm{Def}(L)\leq n}} \max_{\substack{f\in L \\ \|f\|=1}} \|Tf\|^2$$

donc en en déduit :

$$s_n(T) = \min_{\substack{L \\ \mathrm{Def}(L)\leq n}} \max_{\substack{f\in L \\ \|f\|=1}} \|Tf\|$$

En découlent quelques propriétés.

3. On omet d'écrire dim.

Propriété 4.22. *Avec $B \in \mathcal{B}$, on a $s_n(BT) \leq \|B\| s_n(T) \geq s_n(TB)$.*

Démonstration. La première inégalité est triviale, et on obtient l'autre en passant à l'adjoint. □

Théorème 4.23. $s_{n+1}(T) = \min_{\operatorname{rg} K \leq n} \|T - K\|$.

Démonstration. Soit $\operatorname{rg} K \leq n$; on a

$$s_{n+1}(T) \leq \max_{\substack{f \in \mathcal{N}(K) \\ \|f\|=1}} \|Tf\| = \max_{\substack{f \in \mathcal{N}(K) \\ \|f\|=1}} \|(T-K)f\| \leq \|T - K\|$$

et on peut passer au minimum (à l'inf).

En écrivant la relation de Schmidt pour l'opérateur T (*i.e.* $T = \sum s_n(\cdot, \phi_n)\psi_n$) et en posant $K = K_n := \sum_{m=1}^n s_m(\cdot, \phi_m)\psi_m$, on a : $(T-K)f = \sum_{m \geq n+1} s_m(f, \phi_m)\psi_m$ puis $\|(T-K)f\|^2 = \sum_{m \geq n+1} s_m^2 |(f, \phi_n)|^2 \geq s_{n+1}^2 \|f\|^2$ et donc $\|(T-K)f\| \leq s_{n+1}\|f\|$ et donc $\|T - K\| \leq s_{n+1}(T)$. C'est gagné ! (Et c'est bien un min ;-)) □

Corollaire 4.24. *Soient T_1 et T_2 deux opérateurs compacts. On a :*

$$s_{n+m+1}(T_1 + T_2) \leq s_n(T_1) + s_m(T_2)$$

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que si $\operatorname{rg} K_1 \leq n - 1$ et $\operatorname{rg} K_2 \leq m - 1$ alors $\operatorname{rg}(K_1 + K_2) \leq n + m - 2$. Ainsi :

$$s_{n+m-1}(T_1 + T_2) \leq \|T_1 + T_2 - K_1 - K_2\| \leq \|T_1 - K_1\| + \|T_2 - K_2\|$$

Or, on peut choisir K_j tel que $\|T_1 - K_1\| = s_n(T_1)$ et $\|T_2 - K_2\| = s_m(T_2)$: on déduit alors le corollaire de l'inégalité précédente. □

Corollaire 4.25. *Si T, T' sont compacts alors $|s_n(T) - s_n(T')| \leq \|T - T'\|$.*

5 Idéaux de Schatten–von Neumann

5.1 Définitions et premières propriétés

Rappelons que $\mathfrak{S}_0 \subseteq \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}_\infty \subseteq \mathcal{B}$; les idéaux, notés $\mathfrak{S}_p$, sont les idéaux les « plus importants ».

Définition 5.1. Pour $p > 0$, on dit que T opérateur compact appartient à $\mathfrak{S}_p$ (on dit *de classe* p) si :

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(T) < \infty$$

L'idéal $\mathfrak{S}_2$ s'appelle l'idéal de Hilbert–Schmidt, et $\mathfrak{S}_1$ est l'ensemble des *opérateurs à trace*.

Remarque 5.2. Ces idéaux sont un peu comme les espaces $\ell^p(\mathbb{N}^*)$.

Définition 5.3. Si $p \geq 1$, on définit la norme de $T \in \mathfrak{S}_p$ par $\|T\|_p^p := \sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(T)$.

Remarque 5.4. C'est bien une norme. Si toutefois $p < 1$, $\|\cdot\|_p$ définit une quasi-norme, c'est-à-dire $\|T_1 + T_2\| \leq c_p(\|T_1\|_p + \|T_2\|_p)$. (On a donc $c_p = 1$ si $p \geq 1$.)

Propriété 5.5. *Si $p_2 > p_1$ on a $\mathfrak{S}_0 \subseteq \mathfrak{S}_{p_1} \subseteq \mathfrak{S}_{p_2} \subseteq \mathfrak{S}_\infty$ et si $T \in \mathfrak{S}_{p_1}$ alors $\|T\|_{p_2} \le \|T\|_{p_1}$.*

Démonstration. Si $T \in \mathfrak{S}_{p_1}$, on a $\sum s_n^{p_2} = \sum s_n^{p_1} s_n^{p_2-p_1} \le (\sum s_n^{p_1}) s_1^{p_1 \frac{p_2-p_1}{p_1}} \le \sum s_n^{p_1} (\sum s_n^{p_1})^{\frac{p_2-p_1}{p_1}} = (\sum s_n^{p_1})^{1+\frac{p_2-p_1}{p_1}=\frac{p_2}{p_1}}$. □

Propriété 5.6. *Si $T \in \mathfrak{S}_p$ alors $T^* \in \mathfrak{S}_p$.*

Démonstration. Les valeurs singulières sont les mêmes :-) □

Propriété 5.7. *Si $B_i \in \mathcal{B}$ et $T \in \mathfrak{S}_p$ alors $\|B_1 T B_2\|_p \le \|B_1\| \|T\|_p \|B_2\|$.*

Démonstration. On a vu que $s_n(B_1 T B_2) \le \|B_1\| s_n(T) \|B_2\|$. □

Théorème 5.8. *L'espace $\mathfrak{S}_p$ est linéaire, de Banach si $p \ge 1$. Il est même séparable et en fait $\mathfrak{S}_0$ y est dense.*

Démonstration partielle. Il suffit de montrer que si $T_i \in \mathfrak{S}_p$ alors $T_1 + T_2 \in \mathfrak{S}_p$. On utilise pour cela l'inégalité suivante (c'est un théorème précédent) :

$$s_{2n}(T_1 + T_2) \le s_{2n-1}(T_1 + T_2) \le s_n(T_1) + s_n(T_2)$$

On conclut en utilisant le fait que ℓ^p est stable par somme. □

5.2 Inégalité de Hölder

Théorème 5.9. *Si $p, q > 1$ sont conjugués, si $T \in \mathfrak{S}_p$ et $Q \in \mathfrak{S}_q$ alors :*

$$\|TQ\|_1 \le \|T\|_p \|Q\|_q$$

Démonstration partielle. La preuve utilise l'inégalité suivante :

$$\sum_{k \le r} s_k(TQ) \le \sum_{k \le r} s_k(T) s_k(Q)$$

C'est trivial pour $r = 1$ car s_1 est la norme. Cela reste vrai si $r \ge 2$ mais c'est plus dur :-)

Fort de cette inégalité, en utilisant l'inégalité de Hölder classique on obtient

$$\sum_{k \le r} s_k(TQ) \le \left(\sum_{k \le r} s_k(T)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \le r} s_k(Q)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

donc en faisant tendre r vers l'infini on conclut. □

5.3 Opérateurs à trace

5.3.1 Préliminaires

Rappelons que les opérateurs à trace sont les éléments de $\mathfrak{S}_1$, c'est-à-dire les opérateurs T qui vérifient $\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty$.

Lemme 5.10. *On suppose qu'il existe une base orthonormée (BO) (g_n) telle que $\sum \|T g_n\|^2 < \infty$. Alors $T \in \mathfrak{S}_\infty$.*

Démonstration. Soit $f_n \xrightarrow{w} 0$. On va montrer que $T^* f_n \xrightarrow{s} 0$.

On a $\|T^* f_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |(T^* f_n, g_m)|^2$ (égalité de Parseval) $= \sum_m |(f_n, T g_m)|^2$. Chaque terme de la somme converge vers 0 quand $n \to \infty$ (car (f_n) converge faiblement vers 0) ; on peut majorer chaque terme par $\|f_n\|^2 \|T g_m\|^2$ et on conclut par convergence dominée car (f_n) est bornée (on obtient donc une majoration indépendante de n par le terme général d'une série convergente). □

Théorème 5.11. *Si $T \in \mathcal{B}$ est positif et s'il existe une BO (g_n) telle que $\sum (T g_n, g_n) < \infty$ alors $T \in \mathfrak{S}_1$ et pour tout BO (h_n) on a $\sum (T h_n, h_n) = \|T\|_1$.*

Démonstration. Par hypothèse, on a donc $\sum \|\sqrt{T} g_n\|^2 < \infty$ donc $\sqrt{T}$ est compact donc T également.

On peut donc écrire $T = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (\cdot, \phi_m) \phi_m$. Ainsi,

$$T h_n = \sum_m \lambda_m (h_n, \phi_m) \phi_m$$

et $(T h_n, h_n) = \sum_m \lambda_m |(h_n, \phi_n)|^2$ et donc :

$$\sum (T h_n, h_n) = \sum_{n,m} \lambda_m |(h_n, \phi_m)|^2$$

En permutant (c'est légitime car les termes sont positifs), on obtient

$$\sum (T h_n, h_n) = \sum_m \lambda_m \|\phi_m\|^2 = \sum \lambda_m = \|T\|_1$$

En considérant d'abord $h_n = g_n$ puis une BO (h_n) quelconque on conclut. □

Théorème 5.12. *Soit $T \in \mathfrak{S}_1$ et soient $(g_n), (h_n)$ deux familles orthonormées (par forcément des bases). Alors :*

$$\sum |(T g_n, h_n)| \leq \|T\|_1$$

Démonstration. Écrivons $T = \sum_{m=1}^{\infty} s_m (\cdot, \phi_m) \psi_m$ (attention, ce n'est pas la même chose que dans la preuve précédente). On a donc

$$\begin{aligned} T g_n &= \sum_m s_m (g_n, \phi_m) \psi_m \\ (T g_n, h_n) &= \sum_m s_m (g_n, \phi_m)(\psi_m, h_n) \\ |(T g_n, h_n)| &\leq \sum_m s_m |(g_n, \phi_m)|\, |(\psi_m, h_n)| \end{aligned}$$

d'où en sommant en n et en permutant les sommes (on a le droit car les termes sont positifs) et en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\sum |(T g_n, h_n)| \leq \sum_m s_m \sqrt{\left(\sum_n |(g_n, \phi_m)|^2\right)\left(\sum_n |(\psi_m, h_n)|^2\right)}$$

Et on conclut par l'inégalité de Bessel que la somme de gauche est plus petite que $\sum s_m \|\phi_m\| \|\psi_m\| = \sum s_m = \|T\|_1$. □

Théorème 5.13. *Soit $T \in \mathcal{B}$. Alors pour toutes familles orthonormées $(g_n), (h_n)$ on a :*

$$\sum (Tg_n, h_n) < \infty \implies T \in \mathfrak{S}_1$$

Démonstration. On écrit la décomposition polaire $T = W|T|$. La famille (g_n) est une BO dans $\mathcal{R}(|T|)$. Avec $h_n := Wg_n$ on a :

$$\sum (|T|g_n, g_n) = \sum (W|T|g_n, Wg_n) = \sum (W|T|g_n, h_n) = \sum (Tg_n, h_n) < \infty$$

Ainsi, par le théorème 5.11 on a que $|T| \in \mathfrak{S}_1$ et donc $T = W|T| \in \mathfrak{S}_1$ (et aussi donc la possibilité de prendre $(g_n), (h_n)$ quelconques). □

Théorème 5.14. *Soit $T \in \mathcal{B}$. S'il existe une BO (g_n) telle que $\sum \|Ag_n\| < \infty$ alors $A \in \mathfrak{S}_1$.*

Démonstration. Écrivons $A = W|A|$. On a vu que $\|Ag_n\| = \||A|g_n\|$. Il suffit, d'après l'égalité précédente, de montrer que $|A| \in \mathfrak{S}_1$ *i.e.* on peut supposer $A \geq 0$. Or, :

$$\sum (Ag_n, g_n) \leq \sum \|Ag_n\| < \infty$$

donc par le théorème 5.11 cela conclut. □

Théorème 5.15. *L'application $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathfrak{S}_1$.*

Démonstration. Il suffit de montrer l'inégalité triangulaire.

Si $(g_n), (h_n)$ sont des BO alors (avec $A = A_1 + A_2$)

$$\sum |(Ag_n, h_n)| \leq \sum |(A_1 g_n, h_n)| + \sum |(A_2 g_n, h_n)| \leq \|A_1\|_1 + \|A_2\|_1$$

d'après le théorème 5.12. Par le théorème 5.13, on a $A \in \mathfrak{S}_1$.

Posons maintenant $A = \sum s_n(\cdot, \phi_n)\psi_n$. On a $A\phi_m = s_m\psi_m$ et donc $(A\phi_m, \psi_m) = s_m$. Ainsi, la quantité $\sum |(Ag_n, h_n)|$ avec $g_n = \phi_n$ et $h_n = \psi_n$ donne $\sum s_n = \|A\|_1$ donc on conclut. □

Théorème 5.16. *On a les propriétés suivantes.*
- *$\mathfrak{S}_1$ est complet.*
- *$\mathfrak{S}_0$ y est dense (pour la norme $\|\cdot\|_1$), en particulier $\mathfrak{S}_1$ est séparable.*

Démonstration. **Complétude** Soit $\|A_n - A_m\|_1 \xrightarrow{n,m} 0$. On a donc $\sum_k s_k(A_n - A_m) \xrightarrow{n,m} 0$.
En particulier, $s_1(A_n - A_m) = \|A_n - A_m\| \xrightarrow{n,m} 0$ (cf. après).
Pour $\epsilon > 0, \exists N, \forall n, m \geq N, \sum_k s_k(A_n - A_m) < \epsilon$. On a $s_k(A - A) \leq \|A - B\|$. Or, il existe $A \in \mathcal{B}$ tel que $\|A_n - A\| \to 0$ (pour la norme sur $\mathcal{B}$). L'inégalité précédente montrant que les s_k sont continues pour la norme usuelle, on peut donc passer à la limite quand $m \to \infty$ dans la somme précédente donc on obtient $\sum_k s_k(A_n - A) < \epsilon$. (Sommer pour $k = 0$ à M, passer à la limite (ça marche car les termes sont positifs) puis faire tendre M vers l'infini :)).

Densité On écrit la décomposition de Schmidt $A = \sum s_n(\cdot, \phi_n)\psi_n$ et considérons les opérateurs $A_N := \sum_{n=1}^{N} s_n(\cdot, \phi_n)\psi_n \in \mathfrak{S}_0$. Les valeurs singulières de $A - A_N$ sont $s_{N+1}, s_{N+1}, \ldots$ donc $\|A - A_n\|_1 = \sum_{k>n} s_k \xrightarrow{n} 0$ car la série converge.

□

5.3.2 Trace

Soit $A \in \mathfrak{S}_1$.

Définition 5.17. Soit (g_n) une *BO*. On pose :

$$\operatorname{tr} A := \sum_{n=1}^{\infty} (Ag_n, g_n)$$

Théorème 5.18. *Si (g_n) est une BO alors $\sum (Ag_n, g_n)$ est absolument convergente, et la somme ne dépend pas du choix de la BO (g_n).*

Démonstration. On écrit $A = \sum s_m(\cdot, \phi_m)\psi_m$. On a $Ag_n = \sum_m s_m(g_n, \phi_m)\psi_m$ et $(Ag_n, g_n) = \sum_m s_m(g_n, \phi_m)(\psi_m, g_n)$. En sommant :

$$\sum (Ag_n, g_n) = \sum_n \sum_m s_m(g_n, \phi_m)(\psi_m, g_n)$$

On prouve la convergence absolue et du coup on peut permuter car les termes sont positifs.

$$\begin{aligned}
\sum |(Ag_n, g_n)| &\leq \sum_n \sum_m s_m |(g_n, \phi_m)||(\psi_m, g_n)| \\
&= \sum_m s_m \sum_n (g_n, \phi_m)||(\psi_m, g_n)| \\
&\overset{\text{CS}}{\leq} \sum_m s_m \sqrt{\sum_n |(g_n, \phi_m)|^2 \sum_n |(\psi_m, g_n)|^2} \\
&\overset{\text{BO}}{=} \sum_m s_m \|\phi_m\| \|\psi_m\| \\
&= \sum s_m < \infty
\end{aligned}$$

Ce calcul montre aussi que l'on peut permuter les sommes dans l'égalité initiale, et on obtient donc :

$$\sum (Ag_n, g_n) = \sum_m s_m \sum_n (g_n, \phi_m)(\psi_m, g_n) = \sum_m s_m(\psi_m, \phi_n)$$

(par le théorème de Parseval) et donc la somme des (Ag_n, g_n) ne dépend pas de la BO choisie ! $\square$

Remarque 5.19. En dimension finie, on a bien $\operatorname{tr} A = \sum (Ag_n, g_n)$ si (g_n) est une BO !

Propriété 5.20.

1. $|\operatorname{tr} A| \leq \sum |(Ag_n, g_n)| \leq \|A\|_1$.
2. *Si $A \geq 0$ alors* $\operatorname{tr} A = \sum (Ag_n, g_n) = \|A\|_1$.
   Ainsi, tr *est une fonctionnelle continue de norme* 1.
3. $\operatorname{tr} A^* = \overline{\operatorname{tr} A}$.

Démonstration. Découle des théorème précédents, et le dernier découle des propriétés de la somme :) $\square$

Théorème 5.21. *Si $T \in \mathfrak{S}_\infty$ et $\mathcal{R} \in \mathcal{B}$ sont tels que TR et RT sont dans $\mathfrak{S}_1$. Alors* $\operatorname{tr}(TR) = \operatorname{tr}(RT)$.

Démonstration. On écrit $T = \sum s_m(\cdot, \phi_m)\psi_m$. Alors on a successivement

$$TR\psi_n = \sum_m s_m(R\psi_n, \phi_m)\psi_m$$
$$(TR\psi_n, \psi_n) = \sum_m s_m(R\psi_n, \phi_n)$$
$$\operatorname{tr}(TR) = \sum s_n(R\psi_n, \phi_n)$$

On a $T\phi_n = s_n\psi_n$ donc $RT\phi_n = s_n R\psi_n$. Ainsi :

$$\operatorname{tr}(RT) = \sum_n (RT\phi_n, \phi_n) = \sum s_n(R\psi_n, \phi_n)$$

□

Remarque 5.22. Dans la démonstration précédent, on a utilisé le fait que la somme qui définit la trace ne dépend pas de la BO choisie.

Corollaire 5.23. *$A \in \mathfrak{S}_1$, U unitaire. Alors :*

$$\operatorname{tr}(U^* A U) = \operatorname{tr} A$$

Démonstration. On pose $T := U^*A$ et $R := U$ et on a $RT = A$ car U est unitaire. □

Théorème 5.24 (Lidski)**.** *Si $A \in \mathfrak{S}_1$ alors $\operatorname{tr} A = \sum \lambda_n(A)$.*

Remarque 5.25. On ajoute une valeur propre autant de fois que sa multiplicité *algébrique* (que l'on a pas définie), c'est-à-dire comme en dimension finie.

Théorème 5.26. *Si $\ell : \mathfrak{S}_1 \to \mathbb{C}$ est une fonctionnelle (continue), alors il existe un opérateur $R \in \mathcal{B}$ tel que $\ell(A) = \operatorname{tr}(RA)$, et de plus $\|l\| = \|R\|$. Ainsi, $(\mathfrak{S}_1)'$ est isométrique à $\mathcal{B}$.*

Remarque 5.27. C'est encore une fois comme en dimension finie :)

On peut se demander à quoi ressemble $(\mathfrak{S}_\infty)'$.

Théorème 5.28. *$\forall \ell \in (\mathfrak{S}_\infty)', \exists Q \in \mathfrak{S}_1, \ell(A) = \operatorname{tr}(QA)$ et de plus $\|l\| = \|Q\|_1$. Ainsi, $(\mathfrak{S}_\infty)'$ est isométrique à $\mathfrak{S}_1$.*

Remarque 5.29. Les deux théorèmes précédents sont les analogues de ce qui se passe pour les espaces L^p avec $\mathcal{B}$ les fonctions L^∞ et $\mathfrak{S}_\infty$ les fonctions continues.

Remarque 5.30. En particulier, $\mathfrak{S}_\infty$ n'est pas réflexif.

5.4 Classe de Hilbert–Schmidt

5.4.1 Premiers résultats

Cet espace $\mathfrak{S}_2$ joue le rôle de l'espace L^2 ; les démonstrations seront plus simples que dans la section précédente.

Théorème 5.31. *Si $\sum \|Ag_n\|^2 < \infty$ pour une BO alors $A \in \mathfrak{S}_2$ et si (h_n) est une BO alors $\sum \|Ah_n\|^2 = \|A\|_2^2 = \sum s_n^2$.*

Démonstration. On a d'après l'égalité de Parseval $\sum \|Ag_n\|^2 = \sum_{n,m} |(Ag_n, h_m)|^2 = \sum_{m,n} |(g_n, A^*h_m)|^2 = \sum \|A^*h_m\|^2$ donc la quantité de gauche ne dépend pas de la BO (g_n) choisie :) En particulier, avec $g_n = \phi_n$ (cf. décomposition de Schmidt) alors $A\phi_n = s_n\psi_n$ et donc $\|A\phi_n\|^2 = s_n^2$ donc $\sum \|Ag_n\|^2 = \|A\phi_n\|^2 = \|A\|_2^2$ CQFD. □

Remarque 5.32. De la démonstration découle l'égalité $\|A\|_2 = \|A^*\|_2$.

Théorème 5.33. *Si $A_1, A_2 \in \mathfrak{S}_2$ alors $A := A_1 + A_2 \in \mathfrak{S}_2$ et $\|A\|_2 \le \|A_1\|_2 + \|A_2\|_2$.*

Démonstration. $\sqrt{\sum \|Ag_n\|^2} \le \sqrt{\sum(\|A_1g_n\| + \|A_2g_n\|)^2} \le \sqrt{\sum \|A_1g_n^2\|} + \sqrt{\sum \|A_2g_n\|^2}$ (on a utilisé l'inégalité triangulaire dans ℓ^2). □

Théorème 5.34. *L'espace $\mathfrak{S}_2$ est complet et $\mathfrak{S}_0$ y est dense.*

Démonstration. Même démo que dans la section précédente. □

Théorème 5.35. *Si $A_1, A_2 \in \mathfrak{S}_2$ alors $A := A_1A_2 \in \mathfrak{S}_1$ et on a l'estimation suivante :*

$$\|A_1A_2\|_1 \le \|A_1\|_2\|A_2\|_2$$

Démonstration. On considères deux BO (g_n) et (h_n). On a

$$\begin{aligned}\sum |(A_1A_2g_n, h_n)| &\le \sum \|A_2g_n\|\|A_1^*h_n\| \\ &\le \sqrt{\sum \|A_2g_n\|^2 \sum \|A_1^*h_n\|^2} \\ &= \|A_2\|_2\|A_1\|_2\end{aligned}$$

Par le théorème 5.13, nécessairement $A_1A_2 \in \mathfrak{S}_1$. On écrit encore une fois la décomposition de Schmidt $A = \sum s_n(\cdot, \phi_n)\psi_n$. On a donc $A\phi_n = s_n\psi_n$ et $(A\phi_n, \psi_n) = s_n$. On choisit $g_n = \phi_n$ et $h_n = \psi_n$, et le calcul précédent donne donc $\|A\|_1 = \sum s_n \le \|A_2\|_2\|A_1\|_2$. □

Exercice 5.36. $\forall A \in \mathfrak{S}_1, \exists A_1, A_2 \in \mathfrak{S}_2, A = A_1A_2$. *Indication : utiliser la décomposition de Schmidt ;-)*

5.4.2 Produit scalaire

Définition 5.37. Pour $A_1, A_2 \in \mathfrak{S}_2$, on définit $\langle A_1, A_2\rangle := \mathrm{tr}(A_1A_2^*)$.

Théorème 5.38. *C'est un produit scalaire ; ainsi, $\mathfrak{S}_2$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. La sesquilinéarité découle des propriétés de la trace. De plus, $\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(AA^*) = \mathrm{tr}(A^*A) = \sum \lambda_n(A^*A) = \sum s_n(A)^2 = \|A\|_2^2$. □

Soient $(g_n), (h_n)$ deux BO de $\mathcal{H}$. On introduit les opérateurs $A_{n,m} : f \mapsto (f, g_n)h_m$.

Remarque 5.39. Ce sont des opérateurs de rang 1. De plus, $s_1(A_{n,m}) = 1$ et $A_{n,m}^*f = (f, h_m)g_n$.

Remarque 5.40. Ce sont les analogues des matrices $E_{i,j}$ habituelles.

Théorème 5.41. *$(A_{n,m})_{n,m}$ est une BO de $\mathfrak{S}_2$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathfrak{S}_2$. On a $\langle A, A_{n,m}\rangle = \mathrm{tr}(AA_{n,m}^*) = \sum_k(AA_{n,m}^*h_k, h_k)$. Comme $A_{n,m}^*h_k = (h_k, h_m)g_n = \delta_{k,m}g_n$ on obtient donc $\langle A, A_{nm}\rangle = \sum_k(h_k, h_m)(Ag_n, h_k) = (Ag_n, h_m)$. En particulier, avec $A = A_{kl}$ on obtient $\langle A_{kl}, A_{nm}\rangle = (g_n, g_k)(h_l, h_m) = 0$ tout le temps, sauf si $(k, l) = (n, m)$ auquel cas le produit scalaire vaut 1. Ainsi, (A_{nm}) est une suite orthonormée ; reste à montrer que c'est une base. Soit $A \in \mathfrak{S}_2$ tel que $\langle A, A_{nm}\rangle = 0$ $\forall n, m$. Or, cela signifie que $(Ag_n, h_m) = 0$ $\forall n, m$ donc $Ag_n = 0$ $\forall n$ (car (h_n) est une base) donc $A = 0$ (car (g_n) est une base) :-) □

5.4.3 Correspondances avec les matrices infinies

$A \in \mathfrak{S}_2$, (g_n) BO. On considère la « matrice » $((Ag_n, g_m))_{n,m}$. On a vu que $\sum_{n,m} |(Ag_n, g_m)|^2 = \sum \|Ag_n\|^2 = \|A\|_2^2$.

Supposons que $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(X, \mathrm{d}\mu)$. Considérons l'opérateur intégral A défini par $(Af)(x) = \int_X a(x,y)f(y)\mu(\mathrm{d}y)$ (on dit que a est le noyau de A). On suppose que $a \in \mathrm{L}^2(X \times X)$. On va montrer que alors $A \in \mathfrak{S}_2$, et la réciproque. (La clé est d'écrire la forme sesquilinéaire associée.)

6 Opérateurs symétriques

6.1 Premières définitions et premiers résultats

Définition 6.1. On dit que $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est *symétrique* si :
— $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$;
— $\forall f, g \in \mathcal{D}(A), (Af, g) = (f, Ag)$.

Exercice 6.2. La deuxième condition est équivalente à $\forall f \in \mathcal{D}(A), (Af, f) = \overline{(Af, f)}$.

Définition 6.3. Si $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ alors A^* est défini par $g \in \mathcal{D}(A^*)$ ssi $\exists g_* \in \mathcal{H}, (Af, g) = (f, g_*) \forall f \in \mathcal{D}(A)$. On pose alors $A^* g := g_*$.

Théorème 6.4. *L'opérateur A est* symétrique ssi $A \subseteq A^*$.

Théorème 6.5. *On dit que A est* autoadjoint *si $A = A^*$.*

Exemple 6.6. L'opérateur $-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ est symétrique (faire une intégration par parties).

Théorème 6.7 ((Rappel))**.** *Si $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ alors A^* existe. De plus :*
— *A admet une fermeture* ssi *$\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$;*
— *$\overline{A} = A^{**}$;*
— *si $A \subseteq A^*$ alors A admet une fermeture.*

Définition 6.8. On dit que A est *essentiellement symétrique* si $\overline{A} = \overline{A}^*$.

Définition 6.9. — On dit que $z \in \mathbb{C}$ est *irrégulier* si $\mathcal{R}(A - z\,\mathrm{id}) = \mathcal{H}$. Si c'est le cas, $(A - z\,\mathrm{id})^{-1}$ existe et est borné.
— Posons $\rho(A) := \{z \in \mathbb{C} : z \text{ régulier}\}$; son complémentaire $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ s'appelle le *spectre*.

Définition 6.10. Pour $z \in \rho(A)$, on définit la *résolvante* $\mathrm{R}(A) := (A - z)^{-1}$.

Théorème 6.11. *$\rho(A)$ est ouvert (i.e. $\sigma(A)$ est fermé).*

Théorème 6.12. *Pour $z_1, z_2 \in \rho(A)$ on a l'*identité de Hilbert $\mathrm{R}(z_2) - \mathrm{R}(z_1) = (z_2 - z_1)\mathrm{R}(z_2)\mathrm{R}(z_1)$.

Corollaire 6.13. $\mathrm{R}(z_1)\mathrm{R}(z_2) = \mathrm{R}(z_2)\mathrm{R}(z_1)$.

Théorème 6.14. *La fonction* R *est analytique et on a* $\mathrm{R}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \mathrm{R}^{n+1}(z_0)$.

Démonstration. On a $\mathrm{R}(z) = (\mathrm{id} - (z - z_0)\mathrm{R}(z_0))^{-1} R(z_0)$ donc pour $|(z - z_0)\mathrm{R}(z_0)| < 1$ on conclut. □

Théorème 6.15. *$A \subseteq A^*, z = \alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$. Alors $\|(A-z)f\| \geq |\beta|\|f\|$.*

Corollaire 6.16. *$(A-z)^{-1}$ existe et est borné sur $\mathcal{R}(A-z)$.*

Proposition 6.17. *Si $A = \overline{A}$ alors $\overline{\mathcal{R}(A-z)} = \mathcal{R}(A-z)$.*

Si $A \subseteq A^*$, est-ce que $\exists \widetilde{A} = \widetilde{A}^*, A \subseteq \widetilde{A}$?

Théorème 6.18. *Si $A \subseteq B$ alors $B^* \subseteq A^*$.*

Ainsi, si B prolonge A, tous deux étant symétriques, alors on a $A \subseteq B \subseteq B^* \subseteq A^*$; d'où pour plonger A par un autoadjoint on doit regarder A^*.

Théorème 6.19. *Si $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ et $A = A^*$ alors z est régulier.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathcal{R}(A-z) = \mathcal{H}$. Pour cela, on écrit $\overline{\mathcal{R}(A-z)} \oplus \mathcal{N}(A^* - \bar{z}) = \mathcal{H}$. Or, $A = A^*$ donc A est fermé donc $\overline{\mathcal{R}(A-z)} = \mathcal{R}(A-z)$. De plus, par un théorème précédent on a $\|(A-\bar{z})f\| \geq |\mathrm{Im}(z)|\|f\|$ *i.e.* $A - \bar{z}$ est inversible et $\mathcal{N}(A-\bar{z}) = \{0\}$ (remarquons que $A - \bar{z} = A^* - \bar{z}$ car $A = A^*$) d'où $\mathcal{R}(A-z) = \mathcal{H}$. □

Théorème 6.20. *Soit A tel que $A \subseteq A^*, A = \overline{A}$ et $\exists z, \mathrm{Im}(z) \neq 0, \mathcal{R}(A-z) = \mathcal{R}(A-\bar{z}) = \mathcal{H}$. Alors $A = A^*$.*

Si $A \subseteq A^*, A \subseteq B \subseteq B^* \subseteq A^*$. Comment trouver B ? On utilise la transformation de Cayley, qui lie les opérateurs symétriques et isométriques.

Sur $\mathcal{H}$, soit V un opérateur tel que $\mathcal{D}(V) = \overline{\mathcal{D}(V)}$ et $\|Vf\| = \|f\|$ pour $f \in \mathcal{D}(V)$.

Exercice 6.21. Si V est une isométrie et si $|z| \neq 1$ alors $\|Vf - zf\| \geq |1 - |z||\|f\|$.

Dans $\mathbb{C}$, on utilise $\xi = \frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}$ où $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$, qui envoie un demi-plan sur un disque (typiquement $\lambda = i$). On va faire quelque chose d'analogue, pour les opérateurs.

Définition 6.22. On pose $V := (A-\lambda)(A-\bar{\lambda})^{-1}$: on dit que c'est la *transformation de Cayley* de A.

Soit $f \in \mathcal{D}(A)$. On pose $h := (A-\bar{\lambda})f$. On a $Vh = (A-\lambda)f$. On définit également $\alpha : A \mapsto V = \frac{A-\lambda}{A-\bar{\lambda}}$ où λ est fixé ($\mathrm{Im}(\lambda) > 0$).

Proposition 6.23. *$\mathcal{D}(V) = \mathcal{R}(A-\bar{\lambda})$ et $\mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(A-\lambda)$.*

Proposition 6.24. *α est surjectif.*

Remarque 6.25. Si $(\mathrm{id} - V)^{-1}$ existe, on a $h = (A-\bar{\lambda})(\mathrm{id} - V)^{-1}f$ et $\lambda h - \lambda Vh = (\lambda - \bar{\lambda})Af$ d'où :

$$Af = (\bar{\lambda}V - \lambda)V - \mathrm{id}^{-1} f$$

Ainsi, si $\mathrm{id} - V$ est inversible alors α est (injective et) surjective. Or, on a le lemme suivant.

Lemme 6.26. *Si $V = \alpha(A)$ alors $\ker(V - \mathrm{id}) = \{0\}$.*

Démonstration. Si $Vh = h$ alors $(\lambda - \bar{\lambda})f = 0$ donc f puis h est nul d'où $h = (A-\bar{\lambda})f$. □

Remarque 6.27. On a $\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(\mathrm{id} - V)$; par hypothèse, $\mathcal{D}(A)$ est donc $\overline{\mathcal{R}(\mathrm{id} - V)} = \mathcal{H}$. La question est : a-t-on α surjectif ?

Théorème 6.28. *Si V est isométrique et $\overline{\mathcal{R}(\mathrm{id} - V)} = \mathcal{H}$ alors il existe $A = \overline{A} \subseteq A^*$ tel que $V = \alpha(A)$.*

Problème : on cherche, pour $A = \overline{A} \subseteq A^*, \widetilde{A} \subseteq \widetilde{A}^*$ tel que $A \subseteq \widetilde{A}$. Ainsi, $A \subseteq \widetilde{A} \subseteq \widetilde{A}^* \subseteq A^*$ (on veut décrire l'ensemble des extensions).

Si $A \subseteq A^*$, soit $V = \alpha(A)$ (V est bien défini car A est symétrique). Alors $\mathcal{D}(V) = \mathcal{R}(A - \bar{\lambda}$ et $\mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(A - \lambda)$ et $A \subseteq \widetilde{A}$ ssi $V \subseteq \widetilde{V}$ où $\widetilde{V} = \alpha(\widetilde{A})$.

Avec V_0 isométrique, on a $\mathcal{D}(V_0) \simeq \mathcal{R}(V_0)$. Si $\mathcal{D}(\widetilde{V}) = \mathcal{D}(V) \oplus \mathcal{D}(V_0)$ on écrit $\widetilde{V} f = V f + V_0 f$.

Obstructions :

— si $\mathcal{D}(V) = \mathcal{H}$ ou $\mathcal{R}(V) = \mathcal{H}$, les extensions symétriques n'existent pas ;

— si $\mathcal{D}(V) = \mathcal{R}(V) = \mathcal{H}$ alors $A = A^*$.

Définition 6.29. Si A n'admet pas d'extension symétrique, on dit que A est *maximal*.

6.2 Formules de Neumann

Théorème 6.30 (Première formule de Neumann)**.** *Si $A = \overline{A} \subseteq A^*$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$,*

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \dotplus \ker(A^* - \lambda) \dotplus \ker(A^* - \bar{\lambda})$$

Remarque 6.31. On utilise la notation suivante : le $\oplus$ désigne la somme orthogonale et $\dotplus$ la somme directe.

Théorème 6.32. *On suppose que $A = \overline{A} \subseteq A^*, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$ avec $D_0 \subseteq \ker(A^* - \lambda)$ et $\mathcal{R}_0 \subseteq \ker(A - \mathrm{id})$ avec $\dim D_0 = \dim R_0$.*

Alors il existe un isomorphisme $D_0 \to R_0$ tel que si $\widetilde{A}$ est défini par :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\widetilde{A}) &= \mathcal{D}(A) \dotplus (V_0 - \mathrm{id}) D_0 \\ \widetilde{A} f &= A^* f \end{cases}$$

Alors $\widetilde{A}$ est symétrique et prolonge A.

Réciproquement, si $A \subseteq \widetilde{A} \subseteq A^*$, $\exists D_0, R_0$ et V_0 comme ci-dessus.

Exemple 6.33. $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(0,1), A := -i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \mathcal{D}(A) = \mathcal{C}_0^\infty[0,1]$.

...

6.3 Spectre d'un opérateur symétrique

On rappelle que $\lambda \in \rho(A)$ ssi $(A - \lambda)^{-1}$ existe et est borné sur $\mathcal{H}$; le spectre de A est $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Définition 6.34. Soit $\lambda \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$; on a $\ker(A - \lambda) \oplus \overline{\mathcal{R}(A - \lambda)} = \mathcal{H}$.

— Si $\ker(A - \lambda) \neq \{0\}$ on dit que $\lambda \in \sigma_p(A)$ (spectre *ponctuel*).

— Si $\mathcal{R}(A - \lambda) \neq \overline{\mathcal{R}(A - \lambda)}$ on dit que $\lambda \in \sigma_c(A)$ (spectre *continu*).

Remarque 6.35. $\sigma_p(A) \cap \sigma_c(A)$ n'est pas nécessairement vide.

Définition 6.36. Le spectre *essentiel* est $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) := \sigma_c(A) \cup \sigma_p^\infty(A)$ (où $\sigma_p^\infty(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de multiplicité infinie).

Remarque 6.37. Le spectre essentiel est le spectre sans les valeurs propres isolées de multiplicité finie.

Exemple 6.38. $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$, μ σ-finie. On définit A par $f \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \mapsto (Af : x \mapsto xf(x))$. Construisons A^*, A^{**}.

On a $(Af, g) = (f, g_*)$ et cela mène à $g_* = xg$ avec $g, g_* \in \mathrm{L}^2$. Ainsi, $\mathcal{D}(A^{**}) = \mathcal{D}(A^*)$ d'où A^* est autoadjoint.

Proposition 6.39. *$\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) = \sigma(A)$.*

Démonstration. On a clairement $\subseteq$; soit $\lambda \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$ et on veut montrer que $\lambda \in \rho(A)$. En particulier, $\lambda \notin \sigma_p$ donc $\ker(A - \lambda) = \{0\}$. De plus, $\lambda \notin \sigma_c$ donc $\mathcal{R}(A - \lambda)$ est fermé ; ainsi, ce sous-espace est égal à $\mathcal{H}$ tout entier (cf. décomposition précédente) donc l'inverse $(A - \lambda)^{-1}$ existe et est défini sur $\mathcal{H}$ tout entier. Reste à démontrer qu'il est borné !

Lemme 6.40. *Si A est fermé et A^{-1} existe alors A^{-1} est fermé.*

Démonstration. $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{R}(A)$ et A^{-1} existe, $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A)$. Soient $g_n ß\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$ tels que $g_n \to g$ et $A^{-1}g_n \to f$. On veut montrer que $g \in \mathcal{D}(A^{-1})$ et $A^{-1}g = f$.

On peut écrire $g_n = Af_n$ et on a donc $A^{-1}g_n = f_n \in \mathcal{D}(A)$. On a $g_n \to g$ *i.e.* $Af_n \to g$ et $A^{-1}g_n \to f$ *i.e.* $f_n \to f$. Comme A est fermé, on a $f \in \mathcal{D}(A)$ et $Af = g$. Ainsi, $g \in \mathcal{R}(A) = \mathcal{D}(A^{-1})$ et $A^{-1}g = f$ CQFD. □

Remarque 6.41. On avait déjà montré ce résultat, plus rapidement en passant par le graphe :-)

Ainsi, $(A - \lambda)^{-1}$ défini sur $\mathcal{H}$ est fermé et donc par un théorème de Banach (non démontré ici) on en déduit que $A - \lambda$ est borné. □

Exercice 6.42. $A_\mu = -i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ sur $\mathrm{L}^2(0,1)$ défini sur $\mathcal{C}_0^\infty[0,1]$ avec $|\mu| = 1$ et $f \in \mathcal{D}(A_\mu)$ <u>ssi</u> $f \in \mathrm{H}^1(0,1)$ et $f(1) = \mu f(0)$. Spectres (entier, ponctuel, continu) ?

6.4 L'opérateur de multiplication

$\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$, $(Af)(x) = xf(x)$ et $f \in \mathcal{D}(A)$ <u>ssi</u> $\int_{-\infty}^{+\infty}(1 + x^2)|f(x)|^2\mu(\mathrm{d}x) < \infty$.

Définition 6.43. On dit que $X = \operatorname{supp}\mu$ si X est le plus petit *fermé* tel que $\mu(\mathbb{R} \setminus X) = 0$. De façon équivalente, $x \notin \operatorname{supp}\mu$ <u>ssi</u> $\exists\epsilon > 0, \mu(x - \epsilon, x + \epsilon) = 0)$ ou encore $x \in \operatorname{supp}\mu$ <u>ssi</u> $\forall\epsilon > 0, \mu(x - \epsilon, x + \epsilon) \neq 0$.

Théorème 6.44. $\sigma(A) = \operatorname{supp}\mu$.

Démonstration. Soit $\lambda \notin \operatorname{supp}\mu$; on veut montrer que λ est régulière.

Si $(A - \lambda)f = h$ alors $(x - \lambda)f(x) - h(x)$ et donc $f(x) = \frac{h(x)}{x - \lambda}$. Cette fonction est-elle dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mu)$ et a-t-on $\|f\| \leq c\|h\|$?

On a $\|f\|^2 = \int_\mathbb{R} \frac{|h(x)|^2}{(x-\lambda)^2}\mu(\mathrm{d}x)$. Or λ n'est pas dans le support de μ donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mu(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) = 0$. Ainsi, $\|f\|^2 = \int_{|x-\lambda|>\epsilon} \frac{|h(x)|^2}{(x-\lambda)^2} \leq \frac{1}{\epsilon^2}\int_{|x-\lambda|>\epsilon}|h(x)|^2\mu(\mathrm{d}x) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\|h\|^2$ ok.

Supposons maintenant que $\lambda \in \operatorname{supp}\mu$ et montrons que λ n'est pas régulière. Par définition, $\forall\epsilon > 0, \mu(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) \neq 0$. Pour $\epsilon > 0$, notons χ_ϵ la fonction caractéristique de l'intervalle $(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$. On a $\|(A - \lambda)\chi_\epsilon\| = \int_\mathbb{R}(x - \lambda)^2\chi_\epsilon(x)^2\mu(\mathrm{d}x) = \int_{\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon}(x - \lambda)^2\mu(\mathrm{d}x) \leq \epsilon^2\|\chi_\epsilon\|^2$. L'inverse ne peut donc pas exister (avec $f_\epsilon := \frac{\chi_\epsilon}{\|\chi_\epsilon\|}$ on a $\|(A - \lambda)f_\epsilon\| \to 0$). □

Théorème 6.45. *Le spectre ponctuel de A est constitué des atomes de μ, i.e. les λ tels que $\mu(\{\lambda\}) \neq 0$.*

Démonstration. Il suffit de résoudre $xf(x) = \lambda f(x)$. Ainsi, $f(x) = 0$ si $x \neq \lambda$ et $f(\lambda) = 1$ (on normalise). Si $\mu(\{\lambda\}) \neq 0$, cette fonction f n'est pas triviale. $\square$

Remarque 6.46. La preuve montre que les valeurs propres sont de multiplicité 1 (cf. dimension).

Rappelons que $\mathcal{H} = \ker(A - \lambda) \oplus \overline{\mathcal{R}(A - \lambda)}$ (rappelons également que $\oplus$ = somme orthogonale). On a $f \perp \ker(A - \lambda) \iff f(\lambda) = 0$ et donc $f \in \overline{\mathcal{R}(A - \lambda)}$ ssi $f(\lambda) = 0$. Écrivons $\mu(x) = \mu_p(x) + \mu_e(x)$, où :

— $\mu_p(\{\lambda\}) = 1, \mu_p(x) = 0$ si $\lambda \notin x$;

— μ_e est le reste.

L'opérateur $A|_{\overline{\mathcal{R}(A-\lambda)}}$ est l'opérateur de multiplication dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mu_e)$ (il n'aura donc pas de valeur propres par ce que précède).

Théorème 6.47. $\lambda \in \sigma_c(A) \iff \lambda$ *est un point non isolé de* $\operatorname{supp} \mu$*.*

Remarque 6.48. Cela explique la terminologie spectre « continu ».

Démonstration. Supposons que $\lambda \in \operatorname{supp} \mu$ soit non isolée. On peut donc choisir des intervalles $\Delta_n(\epsilon) := (\lambda_n - \epsilon_n, \lambda_n + \epsilon_n)$ avec $\lambda_n \to 0$ et $\epsilon_n \to 0$. Posons χ_n la fonction caractéristique de Δ_n.

On a $\|(A - \lambda)\chi_n\|^2 = \int_{\Delta_n} (x - \lambda)\mu(\mathrm{d}x)$. Or, $x \in \Delta_n \implies |x - \lambda| \leq |\lambda - \lambda_n| + \epsilon_n$. Ainsi, $\|(A-\lambda)\chi_n\|^2 \leq (|\lambda - \lambda_n| + \epsilon_n)^2 \|\chi_n\|^2$. On peut supposer que $\lambda \notin \Delta_n$; ainsi, on a $\frac{\|(A-\lambda)\chi_n\|}{\|\chi_n\|} \to 0$ donc on a $\lambda \in \sigma(A|_{\mathcal{R}(A-\lambda)})$ et donc nécessairement $\lambda \in \sigma_c(A)$.

Supposons que λ soit un point isolé. Ainsi, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\Delta_\epsilon := (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$ vérifie $\Delta_\epsilon \cap \operatorname{supp} \mu = \{\lambda\}$. Ainsi, $\mu(\Delta_\epsilon) = \mu(\{\lambda\})$. On veut monter que $\lambda \notin \sigma_c(A)$, *i.e.* $\lambda \notin \sigma(A_\lambda)$ où $A_\lambda := A|_{\overline{\mathcal{R}(A-\lambda)}}$ est l'opérateur de multiplication dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{d}\mu_e)$. Par définition, si $\lambda \notin \operatorname{supp} \mu_e$ alors λ est un point régulier de A_λ. (La mesure μ_e est ici comme μ_p mais avec $\{\lambda\}$ en moins.) $\square$

7 Démonstration du théorème spectral

7.1 Mesure spectrale

Soit $(Y, \mathfrak{A})$ un espace mesurable. Ainsi, si $\delta_1, \delta_2 \in \mathfrak{A}$ alors $\delta_1 \cap, \cup \delta_2 \in \mathfrak{A}$.

Regardons $(\mathcal{H}, \mathrm{P} := \mathrm{P}(\mathcal{H}))$, où $\mathrm{P}(\mathcal{H})$ est l'ensemble des projecteurs orthogonaux (donc autoadjoints) de $\mathcal{H}$. On considère une application $E : \mathfrak{A} \to \mathrm{P}$ qui vérifie la propriété suivante : si $\delta = \sqcup_1^\infty \delta_n$ alors $E(\delta) = \operatorname{s\,lim}_N \sum_{n=1}^N E(\delta_n)$ (limite forte) ; en particulier, $E(\delta_1 \sqcup \delta_2) = E(\delta_1) + E(\delta_2)$.

Toutes les démonstrations qui suivent peuvent être trouvées dans le Birman & Solomyak (elles ne sont pas très dures).

Propriété 7.1. — $\delta_1, \delta_2 \in \mathfrak{A}$*. Alors* $E(\delta_1)E(\delta_2) = E(\delta_2)E(\delta_1) = E(\delta_1 \cap \delta_2)$

— *Si* $\delta_1 \cap \delta_2$ *alors* $E(\delta_1)E(\delta_2) = 0$*.*

— *Si* $\delta_1 \subseteq \delta_2$ *alors* $E(\delta_1) \subseteq E(\delta_2)$ *(monotonicité), i.e.* $\forall f \in \mathcal{H}, (E(\delta_1)f, f) \leq (E(\delta_2)f, f)$*.*

Notons $\mathcal{H}(\delta) := E(\delta)\mathcal{H}$ (autrement dit $f \in \mathcal{H}(\delta) \iff f = E(\delta)f$).

Propriété 7.2. — $\delta_1 \cap \delta_2 = \emptyset \implies \mathcal{H}(\delta_1) \perp \mathcal{H}(\delta_2)$*.*

— $\delta_1 \subseteq \delta_2 \implies \mathcal{H}(\delta_1) \subseteq \mathcal{H}(\delta_2)$*.*

Pour $\delta \in \mathfrak{A}$ et $f \in \mathcal{H}$, on note $\mu_f(\delta) := (E(\delta)f, f)$ (c'est une bonne vieille mesure!) et même $\forall f, g \in \mathcal{H}, \mu_{f,g}(\delta) := (E(\delta)f, g)$.

Propriété 7.3 (identité de polarisation)**.** $4\mu_{f,g} = \mu_{f+g} + i\mu_{f+ig} - \mu_{f-g} - i\mu_{f-ig} (= \sum_{k=0}^{3} i^k \mu_{f+i^k g})$

Lemme 7.4. $|\mu_{f,g}|^2 \leq \mu_f \mu_g$

Démonstration. $|(E(\delta)f, g)|^2 = |(E(\delta)f, E(\delta)g)|^2$ (l'opérateur $E(\delta)$ étant égal à son carré et autoadjoint) donc par l'inégalité de Cauchy–Schwarz on obtient $(E(\delta)f, g)|^2 \leq \|(E(\delta)f\|^2 \|E(\delta)g\|^2 = (E(\delta)f, f)(E(\delta)g, g)$ par les mêmes arguments et donc c'est gagné! □

Définition 7.5. Soit $\phi : Y \to \mathbb{R}$. On définit $E\text{-}\sup_Y \phi := \inf\{a \in \mathbb{R}, \phi(y) \leq a \ E-$ p.p.$\}$.

Remarque 7.6. C'est le sup essentiel.

On veut construire $\int_Y \phi(\lambda) E(\mathrm{d}\lambda)$. Dans $\mathrm{L}^\infty(Y, E), \|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty} = E - \sup_Y \phi|$. On note $\Pi = \Pi(Y, E)$ l'ensemble des fonctions simples, c'est-à-dire les fonctions ϕ telles que ϕ est constante sur chaque δ_n où $Y = \sqcup_{n=1}^{N} \delta_n$ (d'habitude on parle de fonction étagée). Ainsi, on a $\phi = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \chi_{\delta_n}$. Cet ensemble Π est dense dans L^∞ (théorie de la mesure).

On peut maintenant définir l'*opérateur* $\mathcal{J}(\phi) = \int_Y \phi \mathrm{d}E$ pour $\phi \in \Pi$ par $\mathcal{J}(\phi) := \sum_{n=1}^{N} \phi_n E(\delta_n)$ (on vérifie que cette définition ne dépend pas de la décomposition $Y = \sqcup \delta_n$).

Propriété 7.7.
- *$\mathcal{J}(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha\mathcal{J}(\phi) + \beta\mathcal{J}(\psi)$.*
- *$\mathcal{J}(\phi\psi) = \mathcal{J}(\phi)\mathcal{J}(\psi) = \mathcal{J}(\psi)\mathcal{J}(\psi)$.*
- *$\mathcal{J}(\phi)^* = \mathcal{J}(\phi)$.*
- *$\mathcal{J}(1) = \mathrm{id}$ (i.e. $E(Y) = \mathrm{id}$).*
- *$(\mathcal{J}(\phi)f, g) = \int_Y \phi(y) \mu_{f,g}(\mathrm{d}y)$, en particulier $(\mathcal{J}(\phi)f, f) = \int_Y \phi(y) \mu_f(\mathrm{d}y)$.*
- *$\|J(\phi)f\|^2 = \int_Y |\phi(y)|^2 \mu_f(\mathrm{d}y)$.*
- *$\|J(\phi)\| = E\text{-}\sup_Y |\phi|$.*

Pour étendre l'intégrale, on dit que $\mathcal{J} : \Pi \to \mathcal{B}$ est une isométrie, Π est dense dans L^∞ donc on peut étendre $\mathcal{J} : \mathrm{L}^\infty \to \mathcal{B}$. Ainsi, :

$$\mathcal{J}(\phi) = \int_Y \phi \, \mathrm{d}E := \lim_n \mathcal{J}(\phi_n)$$

où $\phi_n \in \Pi, \phi_n \to \phi$ dans L^∞.

Remarque 7.8. Si on ne partait pas de L^∞, on n'arriverait plus forcément dans $\mathcal{B}$ (mais dans les opérateurs non bornés ;-)).

Théorème 7.9 (Passage à la limite)**.** *Soient $\phi_n \in \mathrm{L}^\infty, \|\phi\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq c$ telles que $\phi_n \to \phi$ p.p. Alors $s\text{-}\lim \mathcal{J}(\phi_n) = \mathcal{J}(\phi)$.*

Soit $S = S(Y, E) : \phi \in S \iff \phi$ est E-mesurable et $\phi(y)$ est fini p.p. Comment définir $\mathcal{J}(\phi)$?

Tout d'abord, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{J}(\phi)) \iff \int_Y |\phi(y)|^2 \mu_f(\mathrm{d}y) < \infty$ (rappelons que $\mu_f(\delta) = (E(\delta)f, f)$).

Lemme 7.10. *$\mathcal{D}(\mathcal{J}(\phi))$ est linéaire (i.e. un sev) et est dense dans $\mathcal{H}$.*

Définition 7.11. On dit que $\phi_n \xrightarrow{S} \phi$ si $\phi_n \in \mathrm{L}^\infty, \phi_n \to \phi$ E-p.p. et $|\phi_n(y)|^2 \leq c(|\phi(y)|^2 + 1)$.

Exercice 7.12. Pour $\phi \in S$, posons $\delta_n := \{y : |\phi(y)| \leq n$. Les $\phi_n := \chi_{\delta_n} \phi$ conviennent.

Définition 7.13. Soit $\phi \in S$. On rappelle que $f \in \mathcal{D}(\mathcal{J}(\phi)) \iff \int_Y |\phi(y)|^2 \mathrm{d}(E(\mu)f, f) < \infty$. On définit $\mathcal{J}(\phi)f :=$ s-lim $\mathcal{J}(\phi_n)f$ où $\phi_n \in \mathrm{L}^\infty, \phi_n \xrightarrow{S} \phi$.

Théorème 7.14. *$\mathcal{J}(\phi)^* = \mathcal{J}(\overline{\phi})$.*

Les cas $Y = \mathbb{R}$ ou $Y = \mathbb{T} = \mathbb{S}^1$ sont les plus importants.

7.2 Théorèmes spectraux

Si A est autoadjoint et V unitaire, énonçons les théorèmes spectraux.

Théorème 7.15 (théorème spectral)**.** *Il existe une mesure spectrale (unique) telle que* $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, E(\mathrm{d}\lambda)$*, et donc* $Af = \int_{\mathbb{R}} \lambda \,\mathrm{d}E(\lambda) f$ *ou encore* $(Af, g) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \,\mathrm{d}(E(\lambda f, g))$.

Remarque 7.16. $E(\lambda)$: à valeurs projecteur, $E(\lambda)f$: à valeurs vectorielles, $(E(\lambda)f, g)$: à valeurs scalaires.

Théorème 7.17 (théorème spectral)**.** *Il existe une (unique) mesure spectrale* F *telle que* $V = \int_{\mathbb{T}} z\, F(\mathrm{d}z)$.

Remarque 7.18. Ces deux théorèmes sont équivalents : il suffit de poser $V = \frac{A-i}{A+i}$ (transformation de Cayley).

Démonstration. On décrit la démonstration dans le cas unitaire ; soit V un opérateur unitaire.

On introduit $p(z) = \sum_{k=-n}^{n} p_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$ et on note Ω l'ensemble de ces polynômes. On pose également $p^+(z) := \sum_{k=-n}^{n} \overline{p_{-k}} z^k$. On a $p^+(z) = \overline{p(z)}$ si $|z| = 1$.

Lemme 7.19. *On suppose que* $p \in \Omega$ *vérifie* $p(z) \geq 0$ $\forall z \in \mathbb{T}$. *Alors* $\exists q \in \Omega, p = q^+ q$.

Considérons $\mathcal{J} : \Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ définie par $\mathcal{J}(p) := p(V) = \sum_{k=-n}^{n} p_k V^k$.

Propriété 7.20.
- $\mathcal{J}(p + q) = \mathcal{J}(p) + \mathcal{J}(q)$.
- $\mathcal{J}(p)\mathcal{J}(q) = \mathcal{J}(pq)$
- $\mathcal{J}(p^+) = \mathcal{J}(p)^*$.

Lemme 7.21. *Si* $p \in \Omega$ *vérifie* $p(z) \geq 0$ $\forall z \in \mathcal{T}$ *alors* $p(V) \geq 0$.

Démonstration. On a $p = q^+ q$ donc $p(V) = \mathcal{J}(q^+)\mathcal{J}(q) = \mathcal{J}(q)^* \mathcal{J}(q)$ et hop ! □

Lemme 7.22. $\|p(V)\| \leq \max_{|z|=1} |p(z)| = \|p\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{T})}$.

Soient $f, g \in \mathcal{H}$. On considère $\psi_{f,g} : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $\psi_{f,g}(p) := (p(V)f, g)$. On a l'estimation évidente $|\psi_{f,g}(p)| \leq \|p(V)\|\|f\|\|g\|$ donc comme $\|p(V)\| \leq \|p\|_{\mathrm{L}^\infty}$ donc $\|\psi_{f,g}\| \leq \|f\|\|g\|$. On a envie de prolonger $\psi_{f,g}$ à $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ tout entier. Comme la norme L^∞ est exactement la norme sur $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, on peut appliquer le théorème de Riesz (cœur de la preuve) : il existe une mesure $\mu_{f,g}$ sur $\mathbb{T}$ telle que :

$$\psi_{f,g}(\phi) = \int_{\mathbb{T}} \phi \,\mathrm{d}\mu_{f,g} \ \forall \phi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$$

En particulier, on a le résultat pour $\phi = p \in \Omega$ et $|\mu_{f,g}|(\mathbb{T}) \leq \|\psi_{f,g}\| \leq \|f\|\|g\|$. En revenant à la définition de $\psi_{f,g}$ on a donc $(p(V)f, g) = \int_{\mathbb{T}} p(z)\, \mu_{f,g}(\mathrm{d}z)$. En particulier, pour $p(z) = z$ on a $(Vf, g) = \int_{\mathbb{T}} z \mu_{f,g}(\mathrm{d}z)$.

On veut maintenant remonter à une mesure à valeurs projecteurs. Soit $X \subseteq \mathbb{T}$. On a $\mu_{f,g}(X)$ est linéaire en f et antilinéaire en g (par unicité dans le théorème de Riesz) donc peut écrire $\mu_{f,g}(X) = (F(X)f, g)$ (encore ce bon vieux Riesz). On a $|(F(X)f, g)| = |\mu_{f,g}(X)| \leq |\mu_{f,g}|(\mathbb{T}) \leq \|f\|\|g\|$ donc $\|F(X)\| \leq 1$. De plus, $\mu_{f,f} = \overline{\mu_{f,f}}$ donc $(F(X)f, f) \in \mathbb{R}$ *i.e.* l'opérateur $F(X)$ est autoadjoint. Reste à montrer que c'est un projecteur.

Montrons que $(F(X)f, F(X)g) = (F(X \cap Y)f, g)$ *i.e.* $F(Y)F(X) = F(Y \cap X) = F(X)F(Y)$ (on vient de voir que $F(Y)$ est autoadjoint, en particulier $F(X)^2 = F(X)$. On a $\int_{\mathbb{T}} pq \,\mathrm{d}\mu_{f,g} = (p(V)q(V)f, g) = \int_{\mathbb{T}} p \,\mathrm{d}\mu_{q(V)f,g}$. Ainsi, $q \,\mathrm{d}\mu_{f,g} = \mathrm{d}\mu_{q(V)f,g}$.

On a $\int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_X q \,\mathrm{d}\mu_{f,g} = \int_{\mathbb{T}} \mathbf{1}_X \,\mathrm{d}\mu_{q(V)f,g} = \mu_{q(V)f,g}(X) = (F(X)q(V)f, g) = (q(V)f, F(X)g) = \int_{\mathbb{T}} q \,\mathrm{d}\mu_{f,F(X)g}$. Or, comme q est arbitraire donc $\mathbf{1}_X \,\mathrm{d}\mu_{f,g} = \mathrm{d}\mu_{f,F(X)g}$. Ainsi, si $Y \subseteq \mathbb{T}$ alors $\mu_{f,g}(X \cap Y) = \mu_{f,F(X)g}(Y)$ *i.e.* $(F(X \cap Y)f, g) = (F(Y)f, F(X)g)$. par définition de F ; c'est ce que l'on voulait.

Finalement, comme $(f, g) = \int_{\mathbb{T}} \mathrm{d}(F(z)f, g) = (F(\mathbb{T})f, g)$ (cf. $\int_A \mathrm{d}\mu = \mu(A)$!) donc $F(\mathbb{T}) = \mathrm{id}$ (nécessaire dans la définition d'une mesure spectrale). De même, on a $(Vf, g) = \int_{\mathbb{T}} z \,\mathrm{d}(Ff, g)$.

Pour l'unicité, si $\int_{\mathbb{T}} p \,\mathrm{d}(F_1 f, g) = \int_{\mathbb{T}} p \,\mathrm{d}(F_2 f, g)$ alors $(F_1 f, g) = (F_2 f, g)$ d'où $F_1 = F_2$. □

7.3 Utilisations

On peut considérer, si ϕ est une fonction, $(\phi(A)f, g) = \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) \,\mathrm{d}(E(\lambda)f, g)$ (coïncide avec la valeur attendue si ϕ est un polynôme). On peut également le faire avec la résolvante : $((A - z)^{-1} f, g) = \int_{\mathbb{R}} (\lambda - z)^{-1} \,\mathrm{d}(E(\lambda)f, g)$. De plus, si $X \subseteq \mathbb{R}$, le spectre de A dans X est défini par le spectre de $AE(X)$ dans $E(X)\mathcal{H}$.

Exercice 7.23. On reconsidère notre opérateur $A : f \mapsto xf$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, quelle est sa mesure spectrale ?

Remarque 7.24. Tous les opérateurs se ramènent à l'opérateur de multiplication sur la mesure spectrale (cf. $A = \int \lambda \,\mathrm{d}(E(\lambda))$.

8 Spectre et famille spectrale

A désigne un opérateur autoadjoint.

Propriété 8.1. — $\sigma(A) = \mathrm{supp} E$
— $\lambda \in \sigma_p(A)$ ssi $E(\{\lambda\}) \neq 0$.
— $\sigma_c(E) \subseteq \sigma(A)$
— *Les point non-isolés du spectre (i.e. les points du spectre continu) sont caractérisés par* $\forall \epsilon > 0, E(]\lambda - \epsilon, \lambda[\cup]\lambda, \lambda + \epsilon[) \neq 0$.

Soient A_1 et A_2 deux opérateurs de multiplication, dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathrm{d}m_1)$, respectivement $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathrm{d}m_2)$ (note [4]). Quand sont-ils unitairement équivalents ?

Supposons que m_2 soit absolument continue par rapport à m_1, c'est-à-dire $m_1(X) = 0 \implies m_2(X) = 0$. C'est en fait équivalent à $m_2 = pm_1$ où $p \geq 0$. Posons alors $U : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ défini de la façon suivante : $Uf(x) := \sqrt{p(x)} f(x)$. Alors $\|Uf\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}m_1)} = \int_{\mathbb{R}} p(x) f(x)^2 \,\mathrm{d}m_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \,\mathrm{d}m_2(x) = \|f\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathrm{d}m_2)}$. Ainsi, U est une isométrie et $A_1 U = U A_2$; l'opérateur U est-il unitaire (on a seulement $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{R}(U)$ unitaire). Remarquons que si m_1 est équivalente à m_2 (*i.e.* on a de plus m_1 a.c. par rapport à m_2) alors A_1 et A_2 sont unitairement équivalents.

Rappelons que $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma_c(A) \cup \sigma_p^\infty(A)$. De plus, $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A) \iff \mathrm{rg}\, E(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) = \infty$ $\forall \epsilon > 0$. Rappelons que si $\epsilon > 0$ est tel que $\mathrm{rg}\, E(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon) < \infty$ alors le spectre de A dans $(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)$ consiste de valeurs propres de multiplicité finie.

Exercice 8.2. Sur $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+$ on considère $A = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ défini sur $\mathcal{D}(A) \ni f$ ssi $f \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R}_+)$ et $f(0) = 0$.

4. Les mesures sont positives.

1. Montrer que A est autoadjoint.
2. Déterminer la famille spectrale.
3. Déterminer le spectre.

On considère une mesure m sur $\mathbb{R}$. On considère $\mathcal{H} := \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{N}, m)$ avec $\mathcal{N} = \mathbb{C}^n$ espace de Hilbert. L'espace $\mathcal{H}$ est muni du produit scalaire $(f,g)_{\mathcal{H}} := \int_{\mathbb{R}} (f(x), g(x))_{\mathcal{N}}\, m(\mathrm{d}x)$. Est-il de dimension finie ?

Exemple 8.3. $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d), A = -\Delta, \mathcal{D}(A) = \mathrm{H}^2(\mathbb{R})$. $(\phi f)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int e^{-i\langle x, \xi\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x$ ($f \in \mathrm{L}^1$). ϕ est une transformation unitaire de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$.

On a $(\phi(-\Delta)f)(\xi) = |\xi|^2(\phi f)(\xi)$ donc A est unitairement équivalent à la multiplication par $|\xi|^2$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Problème : on n'a étudié que des espaces L^2 à une variable !

Pour pallier ce problème, on va considérer $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mathrm{L}^2(\mathbb{S}^{d-1}), \mathrm{d}\lambda)$ et on pose, pour $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, $(Uf)(\lambda, \omega) := 2^{-\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{d-2}{4}} f(\sqrt{\lambda}\omega)$ avec $\lambda > 0, \omega \in \mathbb{S}^{d-1}$. On a $U : |\xi|^2 f(\xi) \mapsto \lambda(Uf)(\lambda)$ ($\lambda = |\xi|^2$).

Le spectre de A est le support de la mesure de Lebesgue, donc ici $[0, \infty)$; il n'y a pas d'atomes pour la mesure de Lebesgue donc le spectre est absolument continu. De plus, on va dire que le spectre est de multiplicité la dimension de l'espace double L^2 précédent. (Les points en-dehors du spectre ont une multiplicité nulle.)

Cas des opérateurs compacts Si $\dim \mathcal{H} = \infty$, le spectre de A compact autoadjoint est uniquement constitué de valeurs propres de multiplicité finie (sauf peut-être 0) qui ne s'accumulent que en 0. Ainsi, $\sigma_{\text{ess}}(A) = \{0\}$.

Définition 8.4. $f_n \in \mathcal{D}(A)$ s'appelle une suite *singulière* (ou de *Weyl*) si :
- $\|f_n\| = 1$;
- $f_n \xrightarrow{w} 0$;
- $\|Af_n - \lambda f_n\| \to 0$.

Théorème 8.5. $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A) \iff$ *il existe une suite singulière pour* λ.

9 Théorie des perturbations

$A = A^*$, $V = V^*$ « petit » par rapport à A une *perturbation*, *i.e.* $B := A + V$ possède les mêmes propriétés de A.

Théorème 9.1. *Soit A autoadjoint sur $\mathcal{D}(A)$, V est symétrique sur $\mathcal{D}(A)$ i.e. $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(V)$ et $(Vf, g) = (f, Vg)$ $\forall f, g \in \mathcal{D}(A)$. Alors $B := A + V$ est bien défini sur $\mathcal{D}(A)$. De plus, si $\|Vf\|^2 \leq \epsilon^2\|Af\|^2 + c\|f\|^2$ où $\epsilon < 1$ alors B est autoadjoint. En particulier, c'est le cas si $V \in \mathcal{B}$.*

Démonstration. On sait déjà que B est symétrique : il suffit donc de vérifier qu'il est autoadjoint. Pour cela, il suffit de vérifier qu'il existe z de partie imaginaire non nulle telle que $\mathcal{R}(B - z) = \mathcal{R}(B - \overline{z}) = \mathcal{H}$. On a $(B - z)f = h, (A - z)f + Vf = h$ donc avec $(A - z)f = g$ on a $g + V(A - z)^{-1}g = h$. Il suffit donc donc de montrer que $\|V(A - z)^{-1}\| \leq 1$ (cf. inverse de $\mathrm{id} + B$) puis d'utiliser le théorème de Banach. (Remarquons que A est autoadjoint donc z n'est pas valeurs propre de A donc $A - z$ est inversible.)

On veut que $\|Vf\| \leq a\|(A - it)f\|$ où $a < 1$. On $\|(A - it)f\|^2 = \|Af\|^2 + t^2\|f\|^2 \leq t^2\|f\|^2$ (pas de terme du milieu car A autoadjoint). Or, $\|Vf\| \leq \epsilon\|Af|^2 + c\|f\|^2 = \epsilon\left(\|Af\|^2 + \frac{c}{\epsilon}\|f\|^2\right) = \epsilon\|(A - i\frac{c}{\epsilon})f\|^2$ et c'est exactement ce que l'on voulait. $\square$

Théorème 9.2. *Soit V autoadjoint compact et A autoadjoint. Alors $B := A + V$ défini sur $\mathcal{D}(A)$ est autoadjoint et possède le même spectre essentiel que A.*

Lemme 9.3. *Si deux opérateurs A, B on un point régulier z en commun, alors avec $V := B - A$ on a $\mathcal{R}_A(z) - \mathcal{R}_B(z) = -\mathcal{R}_A(z)V\mathcal{R}_B(z)$.*

Théorème 9.4. *Soient A, B autoadjoints bornés qui possèdent le même spectre essentiel. Alors il existe un unique opérateur U unitaire tel que $B - U^*AU$ soit compact.*

Théorème 9.5. *Si A, V sont autoadjoints avec V de rang $r < \infty$, alors pour $z \in \rho(A) \cap \rho(A)$ et $B := A + V$, avec $T := \mathcal{R}_B(z) - \mathcal{R}_a(z)$ on a $\mathrm{rg}T = r$. De plus, A et B ont le même spectre continu.*

10 Opérateurs semi-bornés et formes quadratiques

10.1 Formes quadratiques

Définition 10.1. Soit $\mathcal{D}[a]$ un sev dense de $\mathcal{H}$ et $a[x, y]$ une forme sesquilinéaire définie sur $\mathcal{D}[a]$ telle que $a[x, x] \geq m(x, x)$. On dit que a est *semi bornée inférieurement*. La plus petite constante m est notée m_a. Si $m_a > 0$ on dit que a est définie positive.

Propriété 10.2. *Si a est définie positive, l'espace $\mathcal{D}[a]$ muni du produit scalaire a est un espace préhilbertien, qui vérifie $\|x\| \leq m_a^{-1/2}\|x\|_a$.*

Définition 10.3. On dit que a est *fermée* si $(\mathcal{D}[a], \| \cdot \|_a)$ est complet.

Définition 10.4. Un opérateur A autoadjoint correspond à a si :
— $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}[a]$;
— $\forall f \in \mathcal{D}(A), \forall g \in \mathcal{D}[a], (Af, g) = a[f, g]$.

Théorème 10.5. *Quelque soit A autoadjoint, il existe une unique forme quadratique a qui correspond à A. De plus, $a[f, f] = \|\sqrt{A}f\|^2$.*

Théorème 10.6. *Réciproquement, la donnée de a détermine de façon unique un opérateur A associé.*

Démonstration. Soit $h \in \mathcal{H}$, $\ell_h(g) := (h, g)$ sur $\mathcal{D}[a]$. Il existe B tel que $a[Bh, g] = (h, g)$ et $B : \mathcal{H} \to \mathcal{D}[a]$ et on a $\|Bh\|_a \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\|h\|$. De plus, $a[Bh, Bh] = (h, Bh) \geq 0$. De plus encore une fois, si $Bh = 0$ alors $h = 0$ car alors $(h, g) = 0$ $\forall g \in \mathcal{D}[a]$ donc $h = 0$ par densité de $\mathcal{D}[a]$.

On a $B : \mathcal{H} \to \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{D}[a]$ qui est inversible : notons A son inverse . On a donc $\mathcal{D}(A) = \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{D}[a]$. Si $Bh = f$ alors $h = Af$ et $a[f, g] = (Af, g)$ $\forall g \in \mathcal{D}[a]$ et on a finalement les deux conditions de la définition.

Reste à vérifier l'unicité ; supposons qu'un autre opérateur A_1 correspond à a. Alors $\mathcal{D}(A_1) \subseteq \mathcal{D}[a]$ et $(f, A_1g) = a[f, g]$ $\forall g \in \mathcal{D}(A_1), f \in \mathcal{D}[a]$. On a vu que $a[f, g] = (\sqrt{A}f, \sqrt{A}g)$. On a donc (par définition de l'adjoint) $\sqrt{A}g \in \mathcal{D}(\sqrt{A^*}) = \mathcal{D}(\sqrt{A})$ et par l'égalité précédente (+ densité) on a $A_1g = \sqrt{A}\sqrt{A}g = Ag$ (en particulier, $g \in \mathcal{D}(A)$ donc $A_1 \subseteq A$. On obtient de même $\supseteq$ d'où l'égalité. $\square$

Exemple 10.7. On considère $\mathcal{H} := \mathrm{L}^2(0,1)$ et $a[f,f] = \int_0^1 |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x \left(+\int_0^1 |f|^2\right)$ définie sur $\mathcal{D}[a] = \mathrm{H}^1(0,1)$. L'opérateur A correspondant est donné par $\int f'\overline{g'} = \int Af\overline{g}$ $\forall f \in \mathcal{D}(A) \subseteq \mathrm{H}^1, \forall g \in \mathrm{H}^1$. Ainsi, $\forall g \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1), Af = -(f')' = -f''$ au sens des distributions. Ainsi, f et Af sont dans $\mathrm{L}^2(0,1)$ donc $f \in \mathcal{H}^2(0,1)$. On a $\int f'\overline{g'} = -\int f''\overline{g}$. Or, la première intégrale vaut (par intégration par parties) $-\int f''\overline{g} + [f'\overline{g'}]_0^1$. Ainsi, $f'(1)\overline{g(1)} = f'(0)\overline{g(0)}$ $\forall g \in \mathrm{H}^1$. Or, $g(0)$ et $g(1)$ sont arbitraires, donc $f'(0) = f'(1) = 0$ (ces quantités sont bien définies car $f \in \mathrm{H}^2(0,1)$ donc $f' \in \mathrm{H}^1(0,1) \subseteq \mathcal{C}[0,1]$. On parle de conditions à bord *natuelle*, ou des conditions de Neumann. Il reste à vérifier que $A = A^*$ (facile).

On peut reprendre l'exemple précédent avec $\mathcal{D}[a] = \mathrm{H}_0^1(0,1)$ ou encore avec $a[f,f] = \int_0^\infty |f'|^2 + \alpha|f(0)|^2$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}[a] = \mathrm{H}^1(0,\infty)$.

On peut aussi le généraliser par $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ sur lequel on peut intégrer par parties. On pose alors la *forme de Dirichlet* $a[f,f] = \int_\Omega |\nabla f|^2$ défini sur $\mathrm{H}^1(\Omega)$. On a $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathrm{H}^2(\Omega)$ avec de plus $\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$ (où l'on dérive par rapport à la normale sortante).

Considérons un autre exemple ; $A = A^* \geq m \geq 0$. $Af = h \in \mathcal{H}, f = A^{-1}h$. On considère $-\Delta f + \gamma f = h$ pour $\gamma \geq 0$ sur $\mathrm{L}^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0$ ou $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$.

10.2 Principe variationnel

On revient à l'exemple qui précède ; on a $(Af,g) = (h,g)$ (c'est la motivation). On dispose d'une procédure pour déterminer a étant donné A. Considérons la fonctionnelle $\Phi_A(f) := a[f,f] - 2\Re(f,h)$, $f \in \mathcal{D}[a]$.

Théorème 10.8. *On a :*
- *Φ_A est semi-bornée ;*
- *son minimum $\Phi_{A,\min}$ se réalise sur $f = f_0 = A^{-1}h$;*
- *$\Phi_{A,\min} = -a[f_0,f_0] = -(A^{-1}h,h)$.*

Démonstration. Soit f_0 tel que $h = Af_0$ *i.e.* $f_0 = A^{-1}h$.

On a $\Phi_A(f) = a[f,f] - 2\Re a[f,f_0] + a[f_0,f_0] - a[f_0,f_0] = \|f - f_0\|_a^2 - a[f_0,f_0] \geq -a[f_0,f_0]$ donc c'est certainement semi-borné et le minimum se réalise en f_0. □

Si maintenant $A = A^* \geq \mathrm{id}$, on sait déjà que $\sigma(A) \geq 1$.

Définition 10.9. On dit que le spectre de A semi-borné est dit *discret* s'il consiste de valeurs propres de multiplicité finie qui ne s'accumulent que vers $+\infty$.

Remarque 10.10. Si le spectre de A est discret alors $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$.

Théorème 10.11. *Soit $A = A^* \geq \mathrm{id}$. Le spectre de A est discret si et seulement si tout sous-ensemble borné de $\mathcal{D}[a]$ est compact (comprendre : relativement compact, on utilise ici la terminologie standard de théorie des opérateurs) dans $\mathcal{H}$.*

Remarque 10.12. La dernière condition est équivalente au fait que $\mathrm{id}_a : \mathcal{D}[a] \to \mathcal{H}$ est compact.

Démonstration. Il suffit de montrer que le spectre de A est discret ssi l'opérateur id_a est compact. Or, on a A discret ssi $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ ssi $A^{-\frac{1}{2}} \in \mathfrak{S}_\infty$ (rappelons que pour $B \in B, B \in S_\infty$ ssi $B^* \in S_\infty$ ssi $B^*B \in \mathfrak{S}_\infty$ ssi $BB^* \in \mathfrak{S}_\infty$). Or, $A^{-\frac{1}{2}} \in \mathfrak{S}_\infty$ ssi $\|A^{\frac{1}{2}}f\| \leq c$ f décrivant un compact de $\mathcal{H}$. Or, $A^{-\frac{1}{2}}h$ est compact si h est borné et $h = A^{\frac{1}{2}}f$ ssi f est compact si $A^{\frac{1}{2}}f$ est borné. □

Exemple 10.13. $a[f,f] = \int_{\mathbb{R}^d} |f'|^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |v(x)||f|^2$ où $v \geq 1$. On a $\mathcal{D}[a] = \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}^2(v)$. Il faut montrer que si (f_n) est une suite de Cauchy pour $\| \cdot \|_a$ alors f converge dans $\mathcal{D}[a]$ (définition d'une forme fermée. Or, le caractère Cauchy entraîne que (f_n) est une suite de Cauchy dans H^1 donc $f_n \to f$ dans H^1. D'autre part, on a également le caractère Cauchy dans $\mathrm{L}^2(v)$ (qui est un espace complet) donc $f_n \to \tilde{f}$ dans $\mathrm{L}^2(v)$. Or, les deux convergences précédentes entraînent en particulier la convergence sur les compacts de $\mathbb{R}^d$ donc on a $f = \tilde{f}$ cqfd.

Exemple 10.14. Si cette fois $a[f,f] = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |v(x)||f|^2$ où $v \geq 1$, alors avec $A = -\Delta + v$ (opérateur de Schrödinger) c'est plus dur d'étudier A, d'où le passage par les formes. (On parle d'oscillateur harmonique si $v(x) = |x|^2$.)

Théorème 10.15. *Si $v(x) \to +\infty$ quand $|x| \to \infty$ alors le spectre de A et discret.*

Démonstration. Si $\int |\nabla f_n|^2 + \int v(x)|f_n(x)|^2 \leq c < \infty$ alors on veut montrer que (f_n) est compact dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, il suffit donc de vérifier les conditions suivantes (tiens tiens, serait-ce RFK ? ! :-))

1. $\forall r, f_n$ est compact dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{B}_r)$ avec $x \in \mathbb{B}_r \iff |x| \leq r$;
2. $\forall \epsilon, \exists r, \int_{|x|>\epsilon} |f_n(x)|^2 \leq \epsilon$.

On sait que l'injection $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{L}^2(\mathbb{B}_r)$ est compacte (théorème de Sobolev, même s'il était bien connu bien avant Sobolev), ce qui fournit la première condition. Pour la deuxième, on écrit $\int_{|x|\geq r} |f_n|^2 \leq \max_{|x|\geq r} \frac{1}{v(x)} \int v|f_n|^2$, et l'intégrale est plus petite que c et le quotient est $\epsilon_r \to 0$. □

Soient A et B deux opérateurs semi-bornés $\geq$ id (en fait, ça veut dire que les spectres sont dans $[1, +\infty[$, ou encore $(Af, f) \geq (f, f)$).

Définition 10.16. On dit que $A \geq B$, ou $a \geq b$, si :
- $\mathcal{D}[a] \leq \mathcal{D}[b]$;
- $a[f,f] \geq b[f,f]\ \forall f \in \mathcal{D}[a]$.

Remarque 10.17. La première condition est naturelle : ainsi, a peut être « infini » sur le spectre de b.

Théorème 10.18. *On suppose $A \geq B$. Si le spectre de B est discret à gauche d'un point γ (en particulier ne peuvent s'accumuler que vers γ) alors le spectre de A possède la même propriété et $\lambda_n(A) \geq \lambda_n(B)$.*

Démonstration. (Comprendre dim = rang.) Il suffit de montrer que $\forall \delta < \gamma, \dim E_B(-\infty, \delta) \geq \dim E_A(-\infty, \delta)$ (donc à gauche de δ il y a plus de valeurs propres de B que de A, d'où le théorème). Supposons le contraire : il existe un $\delta < \gamma$ tel que $\dim E_B(-\infty, \delta) < \dim E_A(-\infty, \delta)$. Ainsi, il existe $f \neq 0$ tel que $f \in E_A(-\infty, \delta)\mathcal{H}$ et $f \perp E_B(-\infty, \delta)\mathcal{H}$. On a $a[f,f] = (Af, f) = \int_{-\infty}^{\delta} \lambda \, \mathrm{d}(E_A(\lambda)f, f) < \delta \int_{-\infty}^{\delta} \mathrm{d}(E_A(\lambda)f, f) = \delta\|f\|^2$. Or, $b[f,f] \geq \delta\|f\|^2$ (de la même manière) et $a[f,f] \geq b[f,f]$ (par hypothèse), ce qui n'est possible que si $f = 0$ ce qui est absurde :-) □

Théorème 10.19. $A \geq B \geq \mathrm{id}$. *Alors $B^{-1} \geq A^{-1}$.*

Remarque 10.20. On n'a pas forcément $\sqrt{A} \geq \sqrt{B}$.

Démonstration. Pour $h \in \mathcal{H}, Af_0 = h, Bg_0 = h$. D'après le principe variationnel, f_0 réalise le minimum de $a[f,f] - 2\Re(f,h)$ et aussi celui de $b[f,f] - 2\Re(f,h)$. Or, $a \geq b$ donc nécessairement $\Phi_A(f) \geq \Phi_B(f)$ donc $\min \Phi_A \geq \min \Phi_B$ donc par les calculs fait dans la section adéquate on a $-(A^{-1}h, h) \geq -(B^{-1}h, h)$ et c'est exactement ce qu'il faut. □

10.3 Extension de Friedrichs

Supposons $A_0 \subseteq A_0^*$ semi-borné. On cherche une « bonne » extension de A_0. Posons $a[f,f] = (A_0 f, f)$ sur $\mathcal{D}(A_0)$ et on prend son adhérence.

Lemme 10.21. *L'adhérence existe (cf. démonstration pour la définition).*

Démonstration. Si (f_n) est de Cauchy pour la norme de a et tend vers 0 dans $\mathcal{H}$, on veut montrer qu'elle tend vers 0 pour la norme de a.

On a $a[f_n, g] = (A_0 f_n, g) = (f_n, A_0 g) \to 0\ \forall g \in \mathcal{D}(A_0)$. Ainsi, $f_n \to 0$ dans $\mathcal{D}[a]$ mais dans le sens faible. Donc la convergence à lieu dans le sens fort (cf. limite de toute sous-suite fortement convergente. . .) □

Remarque 10.22. La forme $a[f,f] = \|f\|^2 + |f(\frac{1}{2})|$ sur $\mathrm{L}^2(0,1), \mathcal{C}_0^\infty$ ne possède pas d'adhérence.

Définition 10.23. L'*extension de Friedrichs* est l'opérateur associé à la fermeture de a.

Remarque 10.24. On a donc la suite $A_0 \xrightarrow{\text{correspondance}} a_0 \xrightarrow{\text{fermeture}} a \xrightarrow{\text{correspondance}} A_F$.

Remarque 10.25. L'opérateur A_F est autoadjoint.

Exemple 10.26. Soit $A_0 := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ sr $\mathcal{C}_0^\infty$ dans $\mathrm{L}^2(0,1)$. On a $a_0[f,f] = \int |f'|^2 (+\int |f|^2)$. On a $a[f,f] = \int |f'|^2$, défini sur H^1. L'opérateur associé est $A_F = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ mais cette fois sur $\mathrm{H}^2(0,1)$ avec $f(0) = f(1) = 0$.

On suppose que A_0 symétrique semi-borné, $A_0 \subseteq A_0^*$ et $\forall f \in \mathcal{D}(A_0), (A_0 f, f) \geq \|f\|^2$; A_F désigne son extension de Friedrichs.

Théorème 10.27. *Si $A_0 \subseteq A = A^*$, à A on peut faire correspondre la forme a sur $\mathcal{D}[a]$. Supposons que $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}[a_F]$. Alors $A = A_F$.*

Théorème 10.28. *$A_0 \subseteq \widetilde{A} = \widetilde{A}^*$, alors $\tilde{a} \leq a = a_F$.*

Remarque 10.29. On a (par construction) $\mathcal{D}(A_F) \subseteq \mathcal{D}(a_F)$.

Exemple 10.30. $\mathcal{H} := \mathrm{L}^2(0,1), A_0 := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ sur $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$. On $(A_0 f, f) = \int |f'|^2$, et $u \in \mathcal{D}[a]$ <u>ssi</u> $u \in \mathrm{H}^1$ et $u(0) = u(1) = 0$. On a $A_F = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ mais cette fois $\mathcal{D}(A_F) = \mathrm{H}^2 \ni u$ avec $u(0) = u(1) = 0$.

Considérons l'extension de Neumann $A_N = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ mais cette fois sur $\mathrm{H}^2(0,1) \ni u$ avec $u'(0) = u'(1) = 0$. On n'a pas $\mathcal{D}(A_N) \not\subseteq \mathcal{D}[a]$ car sinon on aurait $A_N = A_F$ et c'est absurde car les éléments de $\mathrm{H}^2(0,1)$ ne s'annulent pas nécessairement au bord. En revanche, on a bien $a_N \leq a_F$ avec (!) $a_F[f,f] = a_N[f,f] = \int |f'|^2$. Ainsi, $\mathcal{D}[a_N] = \mathrm{H}^1(0,1)$ donc $\mathcal{D}[a_F] \subseteq \mathcal{D}[a_N]$ et donc $a_F \geq a_N$.

11 Problèmes à bord

11.1 Problème de Dirichlet

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un ouvert borné avec un bord $\partial\Omega$ convenable.

Définition 11.1. Le *problème de Dirichlet* $A = -\Delta$ sur $\mathcal{D}(A) = \mathrm{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, auquel on demande $u|_{\partial\Omega} = 0$.

On a $-\int_\Omega \Delta f \cdot \bar{f}\mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial n}\bar{f}\mathrm{d}S + \int_\Omega |\nabla f|^2\mathrm{d}x$. Ainsi, $\|Delta f\| + \|f\| \simeq \|f\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)}$ et $A_D f = \int_\Omega |\nabla f|^2$ sur $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ (= adhérence de $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ pour la norme H^1) est l'opérateur associé à cette forme.

Remarque 11.2. On rappelle la formule d'intégration par parties : $\int_\Omega (\partial_i f)g = \int_{\partial\Omega} \gamma_0(f)\gamma_0(g)\mathrm{d}S - \int_\Omega f\partial_i g$. De plus, $\frac{\partial f}{\partial n} := (\nabla f)\cdot n$.

Proposition 11.3 (inégalité de Friedrichs)**.** *Pour $f \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega |f|^2 \leq c\left(\int_\Omega |\nabla f|^2 + \int_{\partial\Omega} |f|^2\mathrm{d}S\right)$$

donc en particulier l'opérateur A_D est semi-borné.

Soient maintenant $A_D^{(1)}$ et $A_D^{(2)}$ deux opérateurs définis par la même expression mais le deuxième étant défini sur un domaine plus grand.

Théorème 11.4. *On a $\lambda_n^{(1)} \geq \lambda_n^{(2)}$.*

Pour démontrer ce théorème, on suppose en fait $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$, avec Ω_1 et Ω_2 qui sont collés le long d'un côté (donc dans $\sqcup$ les fonctions s'annulent sur ce bord mais pas dans Ω). Alors $\mathrm{H}^1_0(\Omega_1 \cup \Omega_2) \subseteq \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ et on a l'inégalité $\lambda_n(\Omega_1 \cup \Omega_2) \geq \lambda_n(\Omega)$. En effet, si $N(\lambda) = \#\{\lambda_n \leq \lambda\}$ alors comme $A_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = A_{\Omega_1} \oplus A_{\Omega_2}$ sur $\mathrm{L}^2(\Omega_1) \oplus \mathrm{L}^2(\Omega_2)$ on a $N(\lambda) = N_1(\lambda) + N_2(\Omega)$. Ainsi, $\lambda(\Omega_i) \geq \lambda_n(\Omega_1 \cup \Omega_2)$.

11.2 Problème de Neumann

$A_N = -\Delta$ et $\frac{\partial f}{\partial n}$.

$-\int_\Omega \Delta f \cdot \bar{f} = \int_\Omega |\nabla f|^2$, $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$. Ainsi, $\lambda := 0$ est toujours valeur propre de A_N :-) Montrons que les valeurs propres sont simples ; pour cela, on va utiliser l'inégalité de Poincaré :

$$\int_\Omega |f|^2 \leq c\left(\int_\Omega |\nabla f|^2 + \left|\int_{\partial\Omega} f\mathrm{d}S\right|^2\right)$$

Remarquons que le dernier terme est nul si $f \perp 1$. Ainsi, avec $A_N f = h$ on a $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A) = \mathcal{H}$.

11.3 Théorème de Weyl

(Début XX$^\text{e}$ siècle.) On considère $A = -\Delta$ sur $\mathrm{L}^2(\Omega)$ avec la condition $u|_{\partial\Omega} = 0$ (problème de Dirichlet) où Ω est un ouvert borné. L'opérateur vaut (par i.p.p.) $\int_\Omega |\nabla f|^2$ sur $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

On a vu que le spectre de A est discret.

Théorème 11.5. *Si $|\partial\Omega| = 0$ alors $\lambda_n = (2\pi)^n \mathcal{V}_d^{-\frac{2}{d}} |\Omega| n^{\frac{2}{d}}(1 + o(1)$ où $\mathcal{V}_d$ est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^d$ (égal à $\frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d\Gamma(\frac{d}{2})}$).*

Remarque 11.6. Calcul de $\mathcal{V}_d$: $(\int_\mathbb{R} e^{-x_1^2-\cdots-x_d^2})^d = \pi^{d/2}$ donc en passant en polaire on trouve $|\mathbb{S}^{d-1}| \int_0^\infty r^{d-1}e^{-r^2}\mathrm{d}r = \pi^{d/2}$. En posant $r = t^{1/2}$ en trouve $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$.

Or, on a aussi $\mathcal{V}_d = \int_{\mathbb{B}_d} \mathrm{d}x = \int_0^1 r^{d-1}\mathrm{d}r|\mathbb{S}^{d-1}| = \frac{1}{d}|\mathbb{S}^{d-1}|$ donc en remplaçant par l'expression de $\mathbb{S}^{d-1}$ trouvée précédemment on conclut.

Notons $N(\lambda) = \#\{\lambda_n < \lambda\}$ $(= \dim E_A(-\infty, \lambda)$. On a donc $N(\lambda) = (2\pi)^{-d}\mathcal{V}_d|\Omega|\lambda^{\frac{d}{2}}(1+o(1))$ et donc $\lambda = cn^{2/d} \iff n^{2/d} = \frac{\lambda}{c} \iff n = \left(\frac{\lambda}{c}\right)^{\frac{2}{d}}$. En particulier, plus le volume est grand plus il y a de valeurs propres.

Idée de la démonstration :

— on établit un modèle ;

— on utilise des méthodes variationnelles.

Modèle. Cube Q_a d'angle inférieur gauche en $(0,0)$ de coté a. Le problème est $-\Delta u = \lambda u$ avec $u = 0$ sur le bord de Q_a. On cherche $u(x,y) = u_1(x)u_2(y)$. Le problème s'écrit donc $-u_1''u_2 - u_1u_2'' = \lambda u_1u_2$ donc on obtient $-\frac{u_1''}{u_1} - \frac{u_2''}{u_2} = \lambda$ donc $-\frac{u_1''}{u_1} = \lambda_1$ et $-\frac{u_2''}{u_2} = \lambda_2$. Ainsi, $-u_1'' = \lambda_1 u_1$ sur $(0,a)$ et $u_1(0) = 0, u_1(a) = 0$. Ainsi, $u_1(x) = \sin(\sqrt{\lambda_1}x)$ (par de cos car la fonction est nulle en 0) et la condition $u_1(a) = 0$ donne $\sin(\sqrt{\lambda_1}a) = 0$ *i.e.* $\lambda_1 = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2$. Finalement, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \left(\frac{\pi n_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_2}{a}\right)^2$ où $n_1, n_2 = 1, 2, \ldots$.

L'opérateur $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ étant autoadjoint, ses vecteurs propres forment une base donc l'ensemble des vecteurs propres précédents forme une base hilbertienne (cf. e_if_j).

Si maintenant $Q_a \subseteq \mathbb{R}^d$, les vecteurs propres sont $\psi(x) = \prod_{i=1}^d \sin\left(\frac{\pi n_i}{a}x\right)$ et $\lambda_n = \sum\left(\frac{\pi n_i}{a}\right)^2$. Pour déterminer $N(\lambda)$, on cherche donc à déterminer $\sum n_i^2 \leq \frac{a^2}{\pi^2}\lambda$: c'est le nombre de points entiers dans une boule ! On obtient donc que $N(\lambda) = \mathcal{V}_d(\frac{a}{\pi}\sqrt{\lambda})^d\frac{1}{2^d} = \mathcal{V}_d(\frac{p}{2\pi})^d\lambda^{d/2}(1+o(1))$.

Si Ω est un ouvert borné, $|\Omega| = \sum|Q_n|$ où Q_n sont des cubes ouverts deux à deux disjoints et $\Omega = \cup\overline{Q_n}$ (cf. définition de la mesure de Lebesgue). Ainsi, $\forall\epsilon > 0, \exists N(\epsilon), |\Omega\backslash\cup_{n=1}^N Q_n| < \epsilon\ \forall N \geq N(\epsilon)$. Ainsi, $\mathcal{N}(\lambda_1\Omega) \geq N(\lambda_1 \cup_{n=1}^N Q_n) = \sum_{n=1}^n \mathcal{N}(\lambda_1 Q_n) = \mathcal{V}_d/(2\pi)^d\lambda^{d/2}\sum_{n=1}^N|Q_n| + o(\lambda^{d/2})$.

Ainsi, $\lambda^{-d/2} \geq \mathcal{V}_d/(2\pi)^d\sum_{n=1}^N|Q_n| + o(1)$ et $\liminf_\lambda \lambda^{-d/2}N(\lambda_1\Omega) \geq \mathcal{V}_d/(2\pi)^d\sum_{n=1}^N|Q_n| \geq \mathcal{V}_d/(2\pi)^d(|\Omega| - \epsilon)$. Comme ϵ est quelconque on peut l'enlever :-)

Comment estimer la lim sup ? Pour cela, soit Q une boîte qui contient Ω et posons $\Omega_1 := Q \subseteq \overline{\Omega}$. On a $Q = \Omega \sqcup \Omega_1 \sqcup \partial\Omega$ donc la mesure est la somme des mesures. Ainsi, $N(\lambda\Omega) + N(\lambda\Omega_1) = N(\lambda\Omega_1 \cup \Omega) \leq N(\lambda Q) = |Q|\mathcal{V}_d/(2\pi)^d(1+o(1))$. On a donc $\lambda^{-d/2}N(\lambda\Omega) \leq |Q|\mathcal{V}_d/(2\pi)^d(1+o(1)) - \lambda N(\lambda\Omega_1)$ donc en passant à la lim sup on trouve $\limsup\lambda^{-d/2}N(\lambda\Omega) \leq |Q|\mathcal{V}_d/(2\pi)^d - \liminf\lambda^{-d/2}N(\lambda,\Omega_1) \leq \mathcal{V}_d/(2\pi)^d(|Q| - |\Omega_1) = \mathcal{V}_d/(2\pi)^d|\Omega|$. Or, on avait trouvé que la lim inf était supérieure à cette quantité donc donc on en déduit que la quantité converge vers la borne.