Feuille de TD 5
Intégrales triples - centres de gravité

Exercice 1. *(Intégrales triples)* Calculer les intégrales suivantes.

1.1) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\ln x} dy \int_0^{x+y} e^{x+y+z}\ dz.$

1.2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \int_{-2}^{2} \int_0^1 \frac{y^2\, z}{x^2}\ dx\, dy\, dz.$

1.3) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \Big(\int \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dx\Big)\, dy.$

1.4) $\displaystyle\int\int\int_D (x+y+z)^2\ dx\, dy\, dz$
où D est le domaine limité par les plans d'équation $x=0$, $y=0$, $z=0$ et $x+y+z=1$.

Exercice 2. *(Volumes de révolution)* On se place dans $\mathbb{R}^3$. Etant donné $z_0 \leq z_1$, on considère la surface de révolution qui est engendrée par la fonction continue $y : [z_0, z_1] \to \mathbb{R}_+$. Autrement dit, on fait tourner le graphe de y autour de l'axe Oz. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la surface ainsi engendrée, et $\mathcal{V}$ le volume ainsi limité.

2.1) Montrer que $\displaystyle\mathcal{A} = 2\,\pi \int_{z_0}^{z_1} y\ \sqrt{1+y'^2}\ dz.$

2.2) Montrer que $\displaystyle\mathcal{V} = \pi \int_{z_0}^{z_1} y^2\ dz.$

2.3) En déduire l'aire du paraboloïde de révolution qui est engendré par $z = y^2$ pour $0 \leq z \leq 2$.

2.4) En déduire le volume du paraboloïde de révolution qui est engendré par $z = y^2$ pour $0 \leq z \leq 2$.

Exercice 3. *(Calculs de volumes)*

3.1) *(Volume du tore)*. Soit K un domaine du demi-plan $\big\{(x,z); x \geq 0\big\}$. On note $\mathcal{A}$ son aire et x_G l'abscisse de son centre de gravité. Montrer que le volume $\mathcal{V}$ du domaine D obtenu en faisant tourner K autour de l'axe Oz est donné par la formule $\mathcal{V} = 2\,\pi\, x_G\, \mathcal{A}$.

Application : Soit $0 < r < R$. On considère le tore $\mathcal{T}$ engendré en faisant tourner autour de l'axe (Oz) le cercle de représentation paramétrique $y = R + r\ \cos t$ et $z = r\ \sin t$. Calculer le volume de $\mathcal{T}$.

3.2) *(Volume de la fenêtre de Viviani)*. Partie limitée par la sphère de centre 0 et de rayon 1 et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 - y = 0$.

Exercice 4. *(Coordonnées sphériques)* Soit B la boule unité de $\mathbb{R}^3$. On se donne $a > 0$. Calculer

$$\int\int\int_B \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\ dx\, dy\, dz$$

Exercice 5. *(Centres d'inertie)* On considère le demi-cercle

$$\mathcal{C} := \left\{ (x,y) = R\,(\cos t, \sin t)\,;\, t \in [0,\pi] \right\}, \qquad R > 0\,.$$

On note $l = \pi\, R$ sa longueur.

5.1) Quelles sont les coordonnées (x_G, y_G) de son centre de gravité ?

5.2) On considère le demi-disque $\mathcal{D}$ du plan délimité par $\mathcal{C}$. Quelles sont les coordonnées $(\tilde{x}_G, \tilde{y}_G)$ de son centre de gravité ?

5.3) On note $\mathcal{A}$ l'aire de la surface de révolution obtenue en faisant tourner $\mathcal{C}$ autour de l'axe (Ox). C'est la sphère de $\mathbb{R}^3$ de rayon R qui est centrée en l'origine. Calculer $\mathcal{A}$.

5.4) Vérifier qu'on a $\mathcal{A} = 2\,\pi\, y_G\, l$, et expliquer ce résultat (cas particulier du théorème de Guldin).

Exercice 6. *(Barycentre)* On considère dans le plan un disque centré en l'origine $O := (0,0)$ et de rayon $R > 0$. On perce ce disque par un disque de rayon $R/2$ centré en un point O' situé à une distance de O inférieure à $R/2$. Déterminer le centre de gravité de la surface (homogène) trouée ainsi obtenu.

Exercice 7. *(Intégrale le long d'une courbe)* Dans le plan, on repère les points $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$. On considère l'intégrale curviligne

$$\mathcal{I}(\widehat{AB}\,) := \int_{\widehat{AB}} y^2\, dx - x^2\, dy.$$

7.1) Calculer $\mathcal{I}(\widehat{AB}\,)$ lorsque l'arc $\widehat{AB}$ est le segment de droite $[A,B]$.

7.2) Calculer $\mathcal{I}(\widehat{AB}\,)$ lorsque l'arc $\widehat{AB}$ est le quart de cercle $\mathcal{C}$ liant A à B.

7.3) Comparer $\mathcal{I}([A,B])$ et $\mathcal{I}(\mathcal{C})$. Explication ?