Feuille TD0 - Révisions

Exercice 1. On se donne $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est continue.

1. On suppose que :

$$\forall(\alpha, \beta) \in [a, b], \qquad \int_\alpha^\beta f(t)\, dt = 0.$$

Montrer par l'absurde que $f \equiv 0$.

2. On suppose que :

$$\forall x \in [a, b], \qquad |f(x)| \leq 1, \qquad \int_a^b f(t)\, dt = b - a.$$

Que peut-on en déduire sur f ?

3. On suppose que :

$$\Big|\int_a^b f(t)\, dt\Big| = \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Montrer que f garde un signe constant sur $[a, b]$.

4. On travaille avec $a = -1$ et $b = 1$. On suppose que :

$$\forall x \in [-1, 1], \qquad f(x) < x^3.$$

Montrer que l'intégrale de f sur $[-1, 1]$ est strictement négative.

Exercice 2. On considère les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad 2\, y\, f(x) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Dériver deux fois (par rapport à y) la relation donnée ci-dessus.

3. En déduire la structure de f.

Exercice 3. Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant votre réponse.

1. Toute primitive d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle.

2. Toute primitive d'une fonction négative ou nulle est décroissante.

3. Toute fonction continue est la primitive d'une fonction continue.

4. L'intégrale sur $[-1, 1]$ d'une fonction impaire est nulle.

5. Toute fonction intégrable est continue.

Exercice 4. Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\Big(\sin(\dfrac{\pi}{n}) + \sin(\dfrac{2\pi}{n}) + \cdots \sin(\dfrac{n\pi}{n})\Big).$

2. $v_n = n\Big(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+n)^2}\Big).$