Université Denis Diderot MA4
Licence L2 – MASS 2005–2006

Corrigé du devoir surveillé n°1

Exercice I

Soit $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *la forme quadratique définie par la formule*

$$q(x,y,z) = x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 16yz + 9z^2 \ .$$

1) Déterminer la forme bilinéaire symétrique associée à q *et sa matrice dans la base canonique.*
La forme polaire de q est la forme bilinéaire $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + 2xy' + 2x'y + 3xz' + 3x'z + 4yy' + 8yz' + 8y'z + 9zz' \ .$$

La matrice de q est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

2) Décomposer q *en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. En déduire le rang et la signature de* q*.*
On applique l'algorithme de réduction de Gauß :

$$\begin{array}{rcl} q(x,y,z) & = & x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 16yz + 9z^2 \\ & = & (x+2y+3z)^2 - (2y+3z)^2 + 4y^2 + 16yz + 9z^2 \\ & = & (x+2y+3z)^2 + 4yz \\ & = & (x+2y+3z)^2 + (y+z)^2 - (y-z)^2 \ . \end{array}$$

L'utilisation de cet algorithme justifie que l'on ait bien obtenu une combinaison linéaire de carrés de trois formes linéaires linéairement indépendantes. On en déduit que le rang de q est 3 (q est non-dégénérée) et que sa signature est $(2,1)$.
3) Déterminer une base $\mathscr{B}$ *orthogonale pour* q*.*
La réduction de Gauß obtenue à la question précédente a fait apparaître trois formes linéaires linéairement indépendantes φ_1, φ_2, et φ_3 sur $\mathbb{R}^3$. Elles sont données par les formules

$$\varphi_1(x,y,z) = x + 2y + 3z \qquad \varphi_2(x,y,z) = y + z \qquad \varphi_3(x,y,z) = y - z \ .$$

Déterminons la base duale v_1, v_2, v_3 de cette base de formes linéaires. Pour cela, résolvons le système linéaire paramétré par trois réels a, b, c :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & a \\ y + z & = & b \\ y - z & = & c \end{array} \right.$$

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a - \frac{5}{2}b + \frac{1}{2}c \\ y & = & \frac{1}{2}(b+c) \\ z & = & \frac{1}{2}(b-c) \end{array} \right.$$

On en déduit les égalités $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = \frac{1}{2}(-5,1,1)$, $v_3 = \frac{1}{2}(1,1,-1)$. Le procédé suivi garantit que ces trois vecteurs (v_1, v_2, v_3) forment une base $\mathscr{B}$ orthogonale pour q.

4) Quelle est la matrice de q dans la base $\mathscr{B}$?

La base $\mathscr{B}$ est orthogonale pour q, la matrice cherchée est donc diagonale et les coefficients diagonaux se lisent sur les coefficients des carrés des formes linéaires (dont $\mathscr{B}$ est la base duale) dans la réduction de Gauß obtenue. La matrice de q dans la base $\mathscr{B}$ est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5) Pour tout réel λ, on note $v_\lambda = (\lambda, -1, 1)$ et F_λ l'orthogonal de v_λ pour q. Déterminer la dimension de F_λ. Déterminer à quelle condition sur le réel λ on a une décomposition en somme directe $\mathbb{R}^3 = F_\lambda \oplus \mathbb{R}v_\lambda$.

Pour tout réel λ, le vecteur v_λ est non nul, il engendre un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$; son orthogonal F_λ pour la forme quadratique non-dégénérée q est donc $3 - 1 = 2$.

Comme F_λ et $\mathbb{R}v_\lambda$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ de dimensions respectives 2 et 1, on a $\mathbb{R}^3 = F_\lambda \oplus \mathbb{R}v_\lambda$ si et seulement si $F_\lambda \cap \mathbb{R}v_\lambda = \{0\}$, c'est-à-dire si $v_\lambda \notin F_\lambda$, c'est-à-dire si v_λ n'est pas orthogonal à lui-même, autrement dit $q(v_\lambda) \neq 0$. Le calcul donne $q(v_\lambda) = q(\lambda, -1, 1) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)^2 - 4$. On a $(\lambda + 1)^2 - 4 = 0$ si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = -3$. Par conséquent, on a $\mathbb{R}^3 = F_\lambda \oplus \mathbb{R}v_\lambda$ si et seulement si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -3$.

Exercice II

Soit Q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$Q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 - xy + zx - 2yz \ .$$

1) Déterminer le noyau de Q.

Pour déterminer le noyau de Q, écrivons la matrice M de Q dans la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le noyau de Q est formé des solutions du système linéaire défini par la matrice M. En appliquant la méthode du Pivot de Gauß, on obtient que ce système est équivalent au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x - y + z & = & 0 \\ 3y + z & = & 0 \end{array} \right.$$

Il en résulte que le noyau de Q est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(2, 1, -3)$.

2) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(0, 0, 1) = e_3$. Déterminer une base de l'orthogonal de F pour Q.

La forme polaire B de F est donnée par la formule

$$B((x, y, z), (x', y', z')) = xx' - \frac{1}{2}(xy' + x'y) + \frac{1}{2}(xz' + x'z) - 2yy' - (yz' + y'z) \ .$$

L'orthogonal de $e_3 = (0, 0, 1)$ pour Q est l'ensemble des triplets (x, y, z) de réels tels que

$$B((x, y, z), (0, 0, 1)) = 0 \ .$$

Le calcul montre que

$$B((x, y, z), (0, 0, 1)) = \frac{1}{2}x - y \ .$$

L'orthogonal de e_3 est donc le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $\frac{1}{2}x - y = 0$, une base de cet espace vectoriel est donc formée des deux vecteurs $(0, 0, 1)$, $(2, 1, 0)$.