UNIVERSITÉ RENNES 2

Algèbre IV pour MIASHS - TD4

Année 2020-2021

Exercice 1. Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$.

1. Quelle est la forme bilinéaire symétrique φ associée à q ?
2. Quelle est la matrice S de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$?
3. Décomposer q en somme et/ou en différences de carrés de formes linéaires qui sont linéairement indépendantes.
4. La forme quadratique q est-elle positive ?
5. La forme quadratique q est-elle non dégénerée ?

Exercice 2. Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$.

1. Quelle est la forme bilinéaire symétrique φ associée à q ?
2. Quelle est la matrice S de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$?
3. Décomposer q en somme et/ou en différences de carrés de formes linéaires qui sont linéairement indépendantes. Cette écriture est-elle unique ?
4. La forme quadratique q est-elle positive ?
5. La forme quadratique q est-elle non dégénerée ?
6. On introduit $x_1' = (x_1 - x_2)/\sqrt{2}$ ainsi que $x_2' = (x_1 + x_2)/\sqrt{2}$. Que devient la forme quadratique q lorsqu'elle est exprimée en terme de $x' = (x_1', x_2')$?
7. Déterminer la figure géométrique $\mathcal{E}$ du plan qui est définie par l'équation suivante :
$$\mathcal{E} := \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, q(x_1, x_2) = 2\right\}.$$

Exercice 3. On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2×2 à coefficients réels. Soit $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $\phi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

1. Vérifier que ϕ est une application bilinéaire.
2. Les matrices A et B se mettent sous la forme $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$. Exprimer la valeur de $\phi(A, B)$ en termes des coefficients a_{ij} et b_{ij}.
3. Quelle est la matrice de ϕ dans la "base canonique" de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 4. Décomposer les deux formes quadratiques q suivantes en somme et/ou en différences de carrés de formes linéaires qui sont indépendantes. En déduire leur signature ainsi que leur rang.

a) $q(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz$, b) $q(x,y,z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.

Exercice 5. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Etant donnés $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$B(P,Q) := \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt, \qquad f(P) := B(P,P).$$

1) Montrer que B est une forme bilinéaire.
2) La forme bilinéaire B est-elle symétrique ? Antisymétrique ?
3) La forme f a-t-elle des vecteurs isotropes non nuls ?
4) Calculer la matrice de f dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$.
5) Cas $n = 2$. La forme quadratique f est-elle positive ? Négative ?

Exercice 6. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par la formule

$$q(x,y,z) := x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 16yz + 9z^2.$$

1) Déterminer la forme bilinéaire symétrique associée à q et sa matrice dans la base canonique.
2) Décomposer q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. En déduire le rang de q.
3) Déterminer une base $\mathcal{B}$ qui est orthogonale pour q.
4) Quelle est la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$?
5) Pour tout réel λ, on note $v_\lambda = (\lambda, -1, 1)$ et F_λ l'orthogonal de v_λ pour q. Déterminer la dimension de F_λ.
6) Déterminer à quelle condition sur le réel λ on a une décomposition en somme directe $\mathbb{R}^3 = F_\lambda \oplus \mathbb{R}v_\lambda$.

Exercice 7. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par la formule

$$q(x,y,z) := x^2 - 2y^2 - xy + zx - 2yz.$$

1) Déterminer le noyau de q.
2) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(0,0,1) = e_3$. Déterminer une base de l'orthogonal de F pour q.